١-١ الراديان

الراديان وحدة لقياس الزاوية في النظام الدولي. الراديان هو قياس زاوية مركزية تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة (نق). يُرمز له بالرمز (ᶜ) أو يُكتب بدلالة π.

النتائج الأساسية

نتيجة ١: القوس الذي طوله ١ نق يقابل زاوية مركزية قياسها ١ راديان.

نتيجة ٢: محيط الدائرة = ٢π نق، فتكون: ٢π راديان = ٣٦٠°، أي أن π راديان = ١٨٠°.

نتيجة ٣ (التحويل):

$$\frac{\text{قياس الزاوية بالراديان}}{\pi} = \frac{\text{قياس الزاوية بالدرجات}}{١٨٠^\circ}$$

من الدرجات إلى الراديان: اضرب في $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$

من الراديان إلى الدرجات: اضرب في $\frac{١٨٠^\circ}{\pi}$

١ راديان ≈ ٥٧٫٣° ، ١° ≈ ٠٫٠١٧٤٥ راديان.

الآلة الحاسبة: تأكد من وضعية RAD عند التعامل بالراديان، واستخدم مفتاح DRG للتبديل بين الدرجات والراديان.
وللعودة للدرجات اضبط وضعية DEG.

زوايا يجب حفظها

درجة	٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
راديان	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{\pi٣}{٢}$	$\pi٢$

أمثلة محلولة

مثال ١

أ) حوّل ٦٠° إلى راديان، واكتب الناتج بدلالة π.

الطريقة ١: $٦٠° = ٦٠° \times \frac{\pi}{١٨٠°} = \frac{\pi}{٣}$

الطريقة ٢: $\pi = ١٨٠° \leftarrow ٦٠° = \frac{١٨٠°}{٣} = \frac{\pi}{٣}$

ب) حوّل $\frac{\pi٥}{٩}$ إلى درجات.

الطريقة ١: $\frac{\pi٥}{٩} = \frac{\pi٥}{٩} \times \frac{١٨٠°}{\pi} = ١٠٠°$

الطريقة ٢: $\pi = ١٨٠° \leftarrow ٢٠° = \frac{\pi}{٩} \leftarrow \frac{\pi٥}{٩} = ١٠٠°$

مثال ٢

في المثلث أ ب ج القائم الزاوية في ب: ب ج = ١٠ سم، قياس الزاوية أ = ٦٠٫٥°. أوجد طول أج مقرّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

$$\text{جا}(٦٠٫٥^\circ) = \frac{\text{١٠}}{\text{أج}} \leftarrow \text{أج} = \frac{\text{١٠}}{\text{جا}(٦٠٫٥^\circ)} \approx ١٧٫٧ \text{ سم}$$

(استخدم وضعية RAD في الآلة الحاسبة)

حاول بنفسك

حوّل ١٥٠° إلى راديان، ثم حوّل $\frac{٧\pi}{١٢}$ إلى درجات.

تمارين ١-١

١) حوّل قياس كل زاوية من الزوايا الآتية من الدرجات إلى الراديان، واكتب الناتج بدلالة π:

أ) ٢٠°	**ب)** ٤٠°	**ج)** ٢٥°
د) ٥٠°	**هـ)** ٥°	**و)** ١٥٠°
ز) ١٣٥°	**ح)** ٢١٠°	**ط)** ٢٢٥°
ي) ٣٠٠°	**ك)** ٦٥°	**ل)** ٥٤٠°
م) ٩°	**ن)** ٣٥°	**س)** ٦٠٠°

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٢) حوّل قياس كل زاوية من الزوايا الآتية من الراديان إلى الدرجات:

أ) $\frac{\pi}{٢}$	ب) $\frac{\pi}{٣}$	ج) $\frac{\pi}{٦}$
د) $\frac{\pi}{١٢}$	هـ) $\frac{\pi٤}{٣}$	و) $\frac{\pi٤}{٩}$
ز) $\frac{\pi٣}{١٠}$	ح) $\frac{\pi٧}{١٢}$	ط) $\frac{\pi٩}{٢٠}$
ي) $\frac{\pi٩}{٢}$	ك) $\frac{\pi٧}{٥}$	ل) $\frac{\pi٤}{١٥}$
م) $\frac{\pi٥}{٤}$	ن) $\frac{\pi٧}{٣}$	س) $\frac{\pi٩}{٨}$

الإجابات النموذجية ١-١

١) أ) $\frac{\pi}{٩}$ | ب) $\frac{\pi٢}{٩}$ | ج) $\frac{\pi٥}{٣٦}$ | د) $\frac{\pi٥}{١٨}$ | هـ) $\frac{\pi}{٣٦}$ | و) $\frac{\pi٥}{٦}$ |

ز) $\frac{\pi٣}{٤}$ | ح) $\frac{\pi٧}{٦}$ | ط) $\frac{\pi٥}{٤}$ | ي) $\frac{\pi٥}{٣}$ | ك) $\frac{\pi١٣}{٣٦}$ | ل) $\pi٣$ |

م) $\frac{\pi}{٢٠}$ | ن) $\frac{\pi٧}{٣٦}$ | س) $\frac{\pi١٠}{٣}$

khaled-math.surge.sh

٢) أ) ٩٠° | ب) ٦٠° | ج) ٣٠° | د) ١٥° | هـ) ٢٤٠° | و) ٨٠° | ز) ٥٤° | ح) ١٠٥° | ط) ٨١° | ي) ٨١٠° | ك) ٢٥٢° | ل) ٤٨° | م) ٢٢٥° | ن) ٤٢٠° | س) ٢٠٢٫٥°

الإجابات محسوبة من القاعدة: الراديان = الدرجات × π ÷ ١٨٠، والدرجات = الراديان × ١٨٠ ÷ π.

٢-١ طول القوس

الراديان الذي درسناه يعني: القوس الذي طوله يساوي نصف قطر الدائرة (نق) يقابل زاوية مركزية قياسها ١ راديان. وإذا قابل قوس زاوية مركزية قياسها هـ ᵋ فإن طوله يساوي نق × هـ ᵋ.

النتيجة

نتيجة ٤: طول القوس = نق × هـ ᵋ
حيث هـ قياس الزاوية المركزية بالراديان.

انتبه: إذا أُعطيت الزاوية بالدرجات فحوّلها إلى راديان أولًا (اضرب في $\frac{\pi}{١٨٠°}$).

أمثلة محلولة

مثال ٣

قطاع دائري قياس زاويته المركزية $\frac{\pi}{٣}$ في دائرة نصف قطرها ١٥ سم. أوجد طول قوس القطاع بدلالة π.

طول القوس = نق × هـ^{ء} = ١٥ × $\frac{\pi}{٣}$ = ٥π سم.

مثال ٤

قطاع دائري قياس زاويته ١٫٥^{ء} يحصر قوسًا طوله ١٢ سم. أوجد طول نصف قطر القطاع.

طول القوس = نق × هـ^{ء}

١٢ = نق × ١٫٥^{ء}

نق = ٨ سم.

khaleu

مثال ٥

المثلث أ ب ج متطابق الضلعين حيث أ ج = ج ب = ٨ سم. ج ل قوس في دائرة مركزها ب (النقطة ل على القطعة أ ب)، وقياس الزاوية ج ب أ = ٠٫٩ ق. أوجد: (أ) طول القوس ج ل. (ب) طول أ ل. (ج) محيط المنطقة المظللة (القوس ج ل مع القطعتين أ ج و أ ل).

أ) طول القوس ج ل = نق × هـ ق = ٨ × ٠٫٩ ق = ٧٫٢ سم.

ب) أ ب = ٢ × ٨ × جتا(٠٫٩ ق) ≈ ٩٫٩٥ سم ، و ب ل = ٨ سم

أ ل = أ ب − ل ب = ٩٫٩٥ − ٨ = ١٫٩٥ سم.

ج) المحيط = ٧٫٢ + ٨ + ١٫٩٥ = ١٧٫١٥ سم.

(الشكل في الكتاب صفحة ٢٤)

حاول بنفسك

قطاع دائري نصف قطره ٦ سم وقياس زاويته $\frac{\pi}{٤}$. أوجد طول قوسه بدلالة π.

تمارين ١-٢

١) أوجد طول القوس في كل قطاع دائري من القطاعات الآتية بدلالة π:

أ) نق = ٨ سم ، هـ = $\frac{\pi}{٤}$

ب) نق = ٧ سم ، هـ = $\frac{\pi٣}{٧}$

ج) نق = ١٦ سم ، هـ = $\frac{\pi٣}{٨}$

د) نق = ٢٤ سم ، هـ = $\frac{\pi٧}{٦}$

٢) أوجد طول القوس في كل قطاع دائري من القطاعين أدناه:

أ) نق = ١٠ سم ، هـ = $١٫٣^{ج}$

ب) نق = ٣٫٥ سم ، هـ = $٠٫٦٥^{ج}$

٣) أوجد قياس زاوية القطاع الدائري بالراديان، حيث:

أ) نق = ١٠ سم ، طول القوس ٥ سم

ب) نق = ١٢ سم ، طول القوس ٩٫٦ سم

٤) عجلة دوّارة عملاقة قطرها ١٥٨٫٥ متر. أوجد المسافة التي يقطعها رجل يجلس في عربة موجودة على محيط العجلة إذا دارت العجلة بزاوية قياسها $\frac{\pi}{١٦}$.

باقي التمارين (٥ إلى ٩) فيها أشكال، وهي في كتاب الطالب صفحة ٢٦ و ٢٧.

الإجابات النموذجية ١-٢

١) أ) ٢π سم | ب) ٣π سم | ج) ٦π سم | د) ٢٨π سم

٢) أ) ١٣ سم | ب) ٢٫٢٧٥ سم

٣) أ) $٠٫٥^{ج}$ | ب) $٠٫٨^{ج}$

٤) نق = ٧٩٫٢٥ م ← المسافة = $\frac{\pi}{١٦}$ × ٧٩٫٢٥ ≈ ١٥٫٦ م

١-٣ مساحة القطاع الدائري

مساحة القطاع الدائري تتناسب مع زاويته المركزية:

$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{قياس زاوية القطاع}}{\text{قياس زاوية الدورة الكاملة}}$$

وبالراديان: $\frac{\text{مساحة القطاع}}{\pi \text{ نق}^٢} = \frac{\text{هـ}^{ء}}{\pi ٢}$

النتيجة

نتيجة ٥: مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ هـ^{ء}

للتذكير: طول القوس = نق × هـ^{ء} ، ومساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ هـ^{ء} (هـ بالراديان دائمًا).

أمثلة محلولة

مثال ٦

أوجد بدلالة π مساحة القطاع الدائري الذي زاويته المركزية $\frac{\pi}{٦}$ في دائرة طول نصف قطرها ٩ سم.

المساحة = $\frac{١}{٢}$ ن ق^{٢} هـ^{ع} = $\frac{١}{٢}$ × ٩^{٢} × $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{\pi ٢٧}{٤}$ سم^{٢}.

مثال ٧

دائرة مركزها م ونصف قطرها ٦ سم، أ ب وتر في الدائرة، وقياس الزاوية أ م ب = ١٫٢^{ع}. أوجد: (أ) مساحة القطاع الدائري أ م ب. (ب) مساحة المثلث أ م ب. (ج) مساحة القطعة الدائرية المظللة (الصغرى). (د) مساحة القطعة الدائرية غير المظللة (الكبرى).

أ) $\frac{١}{٢}$ × ٦^{٢} × ١٫٢ = ٢١٫٦ سم^{٢}

ب) $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٦ × جا(١٫٢^{ع}) ≈ ١٦٫٨ سم^{٢}

ج) ٢١٫٦ − ١٦٫٨ = ٤٫٨ سم^{٢}

د) π × ٦^{٢} − ٤٫٨ ≈ ١٠٨٫٣ سم^{٢}

(الشكل في الكتاب صفحة ٢٨)

تمارين ١-٣

١) أوجد مساحة كل قطاع من القطاعات الدائرية الآتية بدلالة π:

أ) نق = ١٢ سم ، هـ = $\frac{\pi}{٦}$	**ب)** نق = ١٠ سم ، هـ = $\frac{\pi ٢}{٥}$
جـ) نق = ٤٫٥ سم ، هـ = $\frac{\pi ٢}{٩}$	**د)** نق = ٩ سم ، هـ = $\frac{\pi ٤}{٣}$

٢) أوجد مساحة كل قطاع من القطاعين الدائريين الآتيين:

أ) نق = ٣٤ سم ، هـ = $١٫٥^{٦}$	**ب)** نق = ٢٫٦ سم ، هـ = $٠٫٩^{٦}$

٣) أوجد زاوية كل قطاع من القطاعين الدائريين الآتيين بالراديان:

أ) نق = ٤ سم ، المساحة ٩ سم²	**ب)** نق = ٦ سم ، المساحة ٢٧ سم²

٤) أ م ب قطاع دائري في دائرة مركزها م، ونصف قطرها ٨ سم، طول القوس أ ب يساوي ١٠ سم. أوجد: (أ) قياس الزاوية أ م ب بالراديان. (ب) مساحة القطاع الدائري أ م ب.

باقي التمارين (٥ إلى ١٣) فيها أشكال، وهي في كتاب الطالب صفحة ٣٠ إلى ٣٣.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

الإجابات النموذجية ١-٣

١) أ) ١٢π سم^٢ | ب) ٢٠π سم^٢ | ج) $٢٢٫٢٥\pi$ سم^٢ | د) ٥٤π سم^٢

٢) أ) ٨٦٧ سم^٢ | ب) ٣٫٠٤ سم^٢

٣) أ) $١٫٢٥$ ع | ب) $١٫٥$ ع

٤) أ) $١٫٢٥$ ع | ب) ٤٠ سم^٢

قائمة التحقق من التعلم والفهم

الراديان والدرجات

الراديان هو قياس زاوية مركزية تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة، ويرمز إليه بالرمز (ع).

$\pi = ١٨٠^\circ$

للتحويل إلى الراديان اضرب في $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$

للتحويل إلى الدرجات اضرب في $\frac{١٨٠^\circ}{\pi}$

طول القوس ومساحة القطاع الدائري

طول القوس = نق × هـ^{ع}

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} هـ^{ع}

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى (٥ أسئلة بأشكال) في كتاب الطالب صفحة ٣٤ و ٣٥.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh