١-٢ المشتقة الأولى

تعلّمت سابقًا كيفية تقدير ميل منحنى عند نقطة من خلال رسم خط **مماس** مناسب، ومن ثم حساب ميل هذا المماس.

رسم خط المماس يعطي تقديرًا للميل عند نقطة التماس، وهذه العملية تستغرق وقتًا. لذا سنتعلم طريقة لإيجاد الميل الدقيق للمنحنى عند أي نقطة عليه دون رسم مماس.

هذه الطريقة تسمى **التفاضل (الاشتقاق)**. وللقيام بذلك علينا **إيجاد المشتقة** للدالة أو لمعادلة المنحنى.

استكشاف ١

استكشاف ١: تمّ إعطاء ثلاثة طلبة أ ، ب ، جـ ، مخططات للمنحنى نفسه. طلب إليهم رسم خط مماس عند نقطة على المنحنى حيث س = ٥ ، ومن ثم حساب ميل المماس عند تلك النقطة. للقيام بذلك، حدّد الطلبة إحداثيات نقطتين على المماس الذي رسموه. (الأشكال في كتاب الطالب صفحة ٤٧)

الطالب أ: (٠,٦ ، ١,٤) و (٦ ، ٧)

الطالب ب: (٠,٨ ، ٢) و (٦,٤ ، ٨)

الطالب جـ: (٠,٩ ، ٢,٥) و (٦,٥ ، ٧,٩)

١) استخدم النقطتين المحدّدتين لحساب ميل المماس الذي رسمه كل من الطلبة أدناه، مقرّبًا إلى أقرب منزلتين عشريتين:
الطالب أ: ..... الطالب ب: ..... الطالب جـ: .....

٢) إذا رُسم مماس بشكل دقيق عند س = ٥ على المنحنى، فسيمر خلال (١,٢ ، ٠,٩٥) و (٨,٢ ، ٧,٠٥). أ) ما هو الميل الصحيح للمماس عند س = ٥ ؟ ب) ناقش وأكمل العبارة الآتية: ميل ..... عند س = ٥ هو ذاته ميل ..... عند س = ٥

ميل المماس والمنحنى

الميل عند نقطة على المنحنى هو ذاته ميل المماس المرسوم بدقة عند تلك النقطة، وهما:

- **موجبان** عندما يميل المماس إلى الأعلى من اليسار إلى اليمين (يصنع المماس زاوية حادة مع محور السينات الموجب).
- **صفر** عندما يكون المماس أفقيًّا (موازيًا لمحور السينات).
- **سالبان** عندما يميل المماس إلى الأسفل من اليسار إلى اليمين (يصنع المماس زاوية منفرجة مع محور السينات الموجب).

الأشكال الثلاثة في كتاب الطالب صفحة ٤٨.

الميل عند ص = س^{٢}

يعرض الجدول الآتي الميل (م) عند ست نقاط على منحنى معادلته ص = س^{٢}:

الإحداثي السيني للنقطة	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ميل المنحنى	-٤	-٢	٠	٢	٤	٦

يمكن أن تلاحظ العلاقة بين الإحداثي السيني وقيمة الميل في كل حالة: يساوي الميل الإحداثي السيني مضروبًا في ٢.

هذا يعني أن الميل عند أي نقطة على المنحنى
ص = د(س) = س^{٢} يساوي ٢س

ثلاث صيغ لكتابة الميل

١) إذا كان ص = س^{٢} فإن الميل هو $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢س

٢) إذا كان د(س) = س^{٢} فإن الميل هو د′(س) = ٢س

٣) إذا كان د(س) = س^{٢} فإن الميل هو $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$(س^{٢}) = ٢س

تسمى $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ **المشتقة الأولى** لـ ص بالنسبة إلى س.
كذلك تسمى د′(س) المشتقة الأولى بالنسبة إلى س.

المشتقة الأولى ودالة الميل

إذا كان ص = د(س) منحنى دالة، تعرف **المشتقة الأولى** (first derivative) على أنها **دالة الميل** (gradient function) للمنحنى.

يرمز أحيانًا إلى مشتقة معادلة المنحنى بـ ص′

اشتقاق دوال القوة

لقد اكتشفت أن مشتقة د(س) = س^{٢} هي د′(س) = ٢س

يمكنك، من خلال رسم مماسات دقيقة على منحنى د(س) = س^{٣} ، أن تكتشف أن مشتقتها هي د′(س) = ٣س^{٢}

بطريقة مماثلة، مشتقة د(س) = س^{٤} هي د′(س) = ٤س^{٣} وأن مشتقة د(س) = س^{٥} هي د′(س) = ٥س^{٤}

يمكنك ملاحظة وجود علاقة جبرية بين دالة القوة د(س) ومشتقتها د′(س). تقود هذه النتائج إلى قاعدة القوة (القاعدة العامة لاشتقاق دوال القوة).

نتيجة ١: قاعدة القوة

نتيجة ١

$$\frac{د}{د\ س}(س^{ن}) = ن\ س^{ن-١}$$

وهذا صحيح لأي قوة حقيقية ن

من الأمثلة على ذلك:

• إذا كان ص = س^{١٠} ، فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ١٠ × س$^{١٠-١}$ = ١٠س^{٩}

أمثلة على قاعدة القوة

• إذا كان د(س) = س $\frac{٣}{٢}$ ، فإن

د′(س) = $\frac{٣}{٢}$ × س$^{\frac{٣}{٢}-١٠}$ = $\frac{٣}{٢}$ س $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt{\text{س}}$

• إذا كان د(س) = س^{٣} ، فإن $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$(س^{٣}) = ٣س^{٢}

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ١

أوجد مشتقة كل من الصيغ الآتية: أ) $س^{٧}$ ب) $\frac{١}{س}$ ج) د(س) = $\sqrt{س}$ د) ص = ٢ هـ) ص = س

الحل

أ) $\frac{د}{د\ س}(س^{٧}) = ٧س^{٧-١}$

= $٧س^{٦}$ (اضرب في القوة ٧ ثم اطرح ١ من القوة)

ب) $\frac{د}{د\ س}(\frac{١}{س}) = \frac{د}{د\ س}(س^{-١})$ (اكتب $\frac{١}{س}$ على الشكل $س^{-١}$)

= $-١ \times س^{-١-١}$ (اضرب في القوة -١ ثم اطرح ١ من القوة)

= $-س^{-٢}$

= $-\frac{١}{س^{٢}}$ (اكتب الإجابة في صيغة السؤال نفسها)

ج) د(س) = $\sqrt{س}$: اكتب $\sqrt{س}$ على الشكل $س^{\frac{١}{٢}}$

د(س) = $س^{\frac{١}{٢}}$

د′(س) = $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ (اضرب في القوة $\frac{١}{٢}$ ثم اطرح ١ من القوة)

= $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$

= $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

د) ص = ٢ (اكتب ٢ على الشكل ٢س^{٠})

ص = ٢س^{٠}

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢ × ٠ × س$^{٠-١}$ (اضرب في القوة ٠ ثم اطرح ١ من القوة)

= ٠

هـ) ص = س (اكتب س على الشكل س^{١})

ص = س^{١}

$\frac{د ص}{د س}$ = ١ × س$^{١-١}$ = س^{٠} (استخدم س^{٠} = ١)

= ١

نتائج ٢ و ٣

نتيجة ٢

إذا كانت د(س) = أ ، فإن د′(س) = ٠

إذا كانت د(س) = س ، فإن د′(س) = ١

نتيجة ٣: قانون الضرب في ثابت

إذا كان ك عددًا ثابتًا ، د(س) دالة ، فإن:

$$\frac{د}{د\ س}[ك\ د(س)] = ك\ \frac{د}{د\ س}[د(س)]$$

نتيجة ٤: قانون الجمع والطرح

نتيجة ٤

إذا كانت د(س) = هـ(س) + ق(س) فإن

د′(س) = هـ′(س) + ق′(س)

إذا كانت د(س) = هـ(س) - ق(س) فإن

د′(س) = هـ′(س) - ق′(س)

مساعدة: إذا كانت د(س) = هـ(س) × ق(س) فإن

د′(س) ≠ هـ′(س) × ق′(س) ، وإذا كانت

د(س) = هـ(س) ÷ ق(س) فإن د′(س) ≠ هـ′(س) ÷ ق′(س)

مثال ٢

أوجد المشتقة بالنسبة إلى س: أ) $٤س^{٣}$ ب) $\frac{٣}{س^{٢}}$ ج) $٤س^{٣} - \frac{٣}{س^{٢}} + \frac{١}{٤} س^{٨}$

الحل

أ) $\frac{د}{د س}(٤س^{٣}) = ٤ \frac{د}{د س}(س^{٣})$ (باستخدام قانون الضرب في ثابت)

$= ٤ \times ٣س^{٢}$

$= ١٢س^{٢}$

ب) $\frac{د}{د س}(\frac{٣}{س^{٢}}) = \frac{د}{د س}(٣س^{-٢})$ (بكتابة $\frac{٣}{س^{٢}}$ على الشكل $٣س^{-٢}$)

$= ٣ \frac{د}{د س}(س^{-٢})$ (باستخدام قانون الضرب في ثابت)

$= ٣ \times (-٢)س^{-٢-١}$

$= -٦س^{-٣} = -\frac{٦}{س^{٣}}$

ج) $\frac{د}{د س}(٤س^{٣} - \frac{٣}{س^{٢}} + \frac{١}{٤} س^{٨})$

$= ١٢س^{٢} - (-\frac{٦}{س^{٣}}) + \frac{د}{د س}(\frac{١}{٤} س^{٨})$ (استخدم الناتج من الجزئية أ والجزئية ب في مشتقة الحدّين الأول والثاني)

$= ١٢س^{٢} + \frac{٦}{س^{٣}} + \frac{١}{٤} \times ٨س^{٧}$

$= ١٢س^{٢} + \frac{٦}{س^{٣}} + ٢س^{٧}$

مثال ٣

إذا كان د(س) = $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ + ٥ ، فأوجد د′(س)

الحل

د(س) = $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ + ٥ (اكتب $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ على الشكل ٤س$^{-\frac{١}{٢}}$)

= ٤س$^{-\frac{١}{٢}}$ + ٥

د′(س) = ٤ $\frac{د}{د س}$(س$^{-\frac{١}{٢}}$) + $\frac{د}{د س}$(٥)

= ٤ × (-$\frac{١}{٢}$)س$^{-١-\frac{١}{٢}}$ + ٠

= -٢س$^{-\frac{٣}{٢}}$

= -$\frac{٢}{\sqrt{س}\ س}$

مثال ٤ (أ)

أوجد د′(س) لكل مما يأتي: أ) د(س) = (س + ٥)(س - ٣)

الحل

د(س) = (س + ٥)(س - ٣) (فك الأقواس)

= س^{٢} + ٥س - ٣س - ١٥ (اجمع الحدود المتشابهة)

= س^{٢} + ٢س - ١٥

∴ د′(س) = $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (س^{٢} + ٢س - ١٥)

= ٢س + ٢

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ٤ (ب)

ب) د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٤}{\text{س}}$

الحل

د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٤}{\text{س}}$ (اقسم كل حد في البسط على المقام)

د(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}} + \frac{٢\text{س}}{\text{س}} - \frac{٤}{\text{س}}$

= س + ٢ - ٤س$^{-١}$

∴ د′(س) = $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$(س + ٢ - ٤س$^{-١}$)

= ١ + ٠ - ٤ × (-١)س$^{-٢}$

= ١ + ٤س$^{-٢}$ = ١ + $\frac{٤}{\text{س}^{٢}}$

تمارين ٢-١

١) أوجد المشتقة بالنسبة إلى س: أ) س^{٥} ب) ٥ س ج) س$^{-٤}$ د) $\frac{١}{\text{س}}$ هـ) ٨ و) $\sqrt[٣]{\text{س}^{-٢}}$

تمارين ٢-١

٢) أوجد د′(س) لكل مما يأتي: أ) د(س) = ٢س^{٤} ب) د(س) = ٣س^{٥} جـ) د(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٦} د) د(س) = $\frac{٣}{س}$ هـ) د(س) = $\frac{٥}{٣س^{٢}}$ و) د(س) = -٢ ز) د(س) = $\frac{٤س}{\sqrt{س}}$ ح) د(س) = $\frac{٢\sqrt{س}}{٣س^{٢}}$

٣) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يأتي: أ) ص = ٥س^{٢} - س + ١ ب) ص = ٢س^{٣} + ٨س - ٤ جـ) ص = ٧ - ٣س - ٥س^{٢} د) ص = (س + ٥)(س - ٤) هـ) ص = (٢س^{٢} - ٣)^{٢} و) ص = $\frac{٢س^{٢} - ٥}{س}$ ز) ص = ٧س^{٢} - $\frac{٣}{س}$ + $\frac{٢}{س^{٢}}$ ح) ص = ٣س + $\frac{٥}{س}$ - $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ ط) ص = $\frac{٤س^{٢} + ٣س - ٢}{\sqrt{س}}$

ورقة الإجابات النموذجية ٢-١

تمرين ١: أ) ٥س^{٤} ب) ٥ جـ) -٤س$^{-٥}$ د) -$\frac{١}{س^{٢}}$ هـ) ٠ و) $\frac{٢}{٣\sqrt{س^{٣}}}$ ز) ٣٠س^{٤} ح) ١١س^{٢}

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمرين ٢: أ) ٨س^{٣} ب) ١٥س^{٤} ج) ٣س^{٥} د) $-\frac{٣}{س^{٢}}$ هـ) $-\frac{١٠}{س^{٣٣}}$ و) ٠ ز) $\frac{٢}{\sqrt{س}}$ ح) $-\frac{١}{س\sqrt{س}}$ (كما في الملف الأصلي، انظر التنبيه)

تنبيه (خطأ في ورقة الإجابات): في تمرين ٢ (ح) الملف الأصلي يعطي $-\frac{١}{س\sqrt{س}}$. القيمة الصحيحة:

د(س) = $\frac{٢}{٣}$ س$^{-\frac{٣}{٢}}$ ، فـ د′(س) = $-$س$^{-\frac{٥}{٢}}$ = $-\frac{١}{٢س\sqrt{س}}$

تمرين ٣: أ) ١٠س − ١ ب) ٦س^{٢} + ٨ ج) −٣ − ١٠س د) ٢س + ١ هـ) ٦س^{٣} − ٢٤س و) ٢ + $\frac{٥}{س^{٢}}$ ز) ٤س + $\frac{٣}{س^{٢}}$ − $\frac{٤}{س^{٣}}$ ح) ٣ − $\frac{٥}{س^{٢}}$ + $\frac{١}{٤س\sqrt{س}}$ ط) ٦$\sqrt{س}$ + $\frac{٣}{٢\sqrt{س}}$ + $\frac{١}{س\sqrt{س}}$

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

تمرين ١ (و): $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ = س$^{\frac{٢}{٣}}$ ، ومشتقتها $\frac{٢}{٣}$ × س$^{-\frac{١}{٣}}$

٢-٢ الميل عند نقطة

تعلّمت كيفية إيجاد مشتقة الدالة، وتُعرف مشتقة الدالة أيضًا بدالة الميل. يمكنك إيجاد الميل عند نقطة على منحنى من خلال تعويض الإحداثي السيني للنقطة في دالة الميل.

نتيجة ٥

لإيجاد الميل عند النقطة س = أ على منحنى ص = د(س)

نوجد قيمة د′(أ) أو $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عند س = أ

استكشاف ٢

استكشاف ٢: تبيّن كل من الجداول أدناه الميل عند خمس نقاط في أربعة تمثيلات مختلفة. ادرس الجداول ثم زاوج معادلة كل منحنى بواحدة من دوال الميل الآتية:

أ) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٥$

ب) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٣س^{٢}$

جـ) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\frac{١}{س^{٢}}$

د) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٤س^{٣}$

١) للمنحنى الذي معادلته ص = س^{٣}:

الإحداثي السيني للنقطة	-١	٠	١	٢	٣
ميل المنحنى	٣	٠	٣	١٢	٢٧

٢) للمنحنى الذي معادلته ص = س^{٤}:

الإحداثي السيني للنقطة	-١	٠	١	٢	٣
ميل المنحنى	-٤	٠	٤	٣٢	١٠٨

٣) للمنحنى الذي معادلته ص = ٥س:

الإحداثي السيني للنقطة	-١	٠	١	٢	٣
ميل المنحنى	٥	٥	٥	٥	٥

٤) للمنحنى الذي معادلته ص = $\frac{١}{\text{س}}$:

الإحداثي السيني للنقطة	-٢	-١	١	٢	٣
ميل المنحنى	$-\frac{١}{٤}$	-١	-١	$-\frac{١}{٤}$	$-\frac{١}{٩}$

مثال ٥

إذا كان د(س) = -س^{٢} + ١١س + ٨ ، فأوجد: أ) د′(س) ب) ميل المنحنى ص = د(س) عند: ١) س = ٤ ٢) س = -٣

الحل

أ) د′(س) = $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$(-س^{٢} + ١١س + ٨) (أوجد مشتقة كل حدّ ثم اجمع أو اطرح)

= -٢س + ١١ + ٠ = ١١ - ٢س

ب) ١) د′(٤) = ١١ - ٢ × ٤ = ٣ (بالتعويض عن س = ٤ في د′(س))

عند س = ٤ ، الميل يساوي ٣

٢) د′(-٣) = ١١ - ٢ × -٣ = ١٧

مثال ٦

منحنى معادلته ص = د(س) = ٣س^{٢} + ١٢س - ٧. أوجد إحداثيات النقطة (س ، ص) على المنحنى حيث الميل يساوي الصفر.

الحل

∴ د′(س) = ٠ (عند النقطة (س ، ص) حيث الميل يساوي الصفر)

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(٣س^{٢} + ١٢س - ٧) = ٠$$

٣ × ٢س + ١٢ - ٠ = ٠

٦س + ١٢ = ٠

س = -٢

القيمة س = -٢ هي الإحداثي السيني للنقطة (س ، ص) حيث الميل يساوي الصفر. عوّض س = -٢ في معادلة المنحنى ص = د(س) لإيجاد الإحداثي الصادي للنقطة:

ص = ٣س^{٢} + ١٢س - ٧

= ٣(-٢)^{٢} + ١٢(-٢) - ٧

= ١٢ - ٢٤ - ٧

= -١٩

ميل المنحنى يساوي الصفر عند (-٢ ، -١٩)

تمارين ٢-٢

١) أوجد ميل المنحنيات ص = د(س) الآتية عند قيم س المعطاة:

أ) د(س) = ٢س^{٢} - س + ٢ عند س = ٢ ب) د(س) = ١٠س - ٢س^{٢} عند س = ٣ ج)

د) د(س) = $\frac{١}{٢}$س^{٢} - ٥س + ١ عند س = ٣ هـ) د(س) = ٣س^{٣} - ٤س^{٢} + س عند س = ٠

و) د(س) = ١١س + ٢س^{٣} - ٥ عند س = -٢ ز) د(س) = ٧س - $\frac{١٢}{س}$ عند س = ٢

ح) د(س) = ٥س^{٩} - ٤٠س - ٧ عند س = ١ ط) د(س) = $\frac{١٦}{\sqrt{س}}$ + $\frac{س}{٣}$ عند س = ٩

٢) أوجد الإحداثيات السينية والصادية للنقطة على منحنى: أ) ص = ٨س - س^{٢} حيث الميل يساوي -٢ ب)

ج) ص = ٢س^{٢} + ٥س - ٣ حيث الميل يساوي ٩ د) ص = ٦س^{٢} - ٤س + ٧ حيث الميل يساوي ٢٠

هـ) ص = ١٠ - ٣٢س - ٤س^{٢} حيث الميل يساوي ٠ و) ص = ١٩ - ٣٦$\sqrt{س}$ حيث الميل يساوي -٩

ص = (٣س - ٢)(٢س - ٣) حيث الميل يساوي -٢

٣) لمنحنى د(س) = أس^{٣} - ٣س^{٢} + ٤ ميل يساوي ٠ عند النقطة حيث س = ٣ ، أوجد قيمة أ

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٤) لمنحنى ص = -٢س + ٤س^{٢} - ب س^{٣} ميل يساوي ٢٠ عند النقطة حيث س = ٢ ، أوجد قيمة ب

٥) ميل منحنى معادلته د(س) = $\frac{٢}{٣}$س^{٣} - $\frac{٣}{٢}$س^{٢} - ١٩س يساوي ١ عند نقطتَين: أ) بيّن أن الإحداثي السيني لإحدى النقطتَين يساوي ٤ ب) أوجد الإحداثي السيني للنقطة الأخرى حيث الميل يساوي ١

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٢

تمرين ١: أ) ٧ ب) -٢ ج) -٢ د) ١ هـ) ٣٥ و) ١٠ ز) ٥ ح) $\frac{١}{٢٧}$

تمرين ٢ (س ، ص): أ) (٥ ، ١٥) ب) (١ ، ٤) ج) (٢ ، ٢٣) د) (-٤ ، ٧٤) هـ) (٤ ، -٥٣) و) ($\frac{١١}{١٢}$ ، -$\frac{٧}{٨}$)

تمرين ٣: أ = $\frac{٢}{٣}$ | **تمرين ٤:** ب = -$\frac{١}{٢}$ | **تمرين ٥ (ب):** س = -$\frac{٥}{٢}$

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

استكشاف ٢ (المزاوجة): ١ ← ب ، ٢ ← د ، ٣ ← أ ، ٤ ← جـ

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٢-٣ معادلة المماس

الميل عند نقطة على المنحنى يساوي ميل المماس عند تلك النقطة. إذًا، إذا كنا نعرف ميل المماس، فيمكننا أن نجد أيضًا معادلته في الصيغة ص = م س + جـ ، حيث (م) الميل، جـ المقطع الصادي.

وبذلك تكون صيغة معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هي ص = م س + جـ ، م = د′(س$_{١}$) ، جـ = ص$_{١}$ - م س$_{١}$ ، حيث (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) تمثل إحداثيات نقطة التماس.

نتيجة ٦

نتيجة ٦

للمنحنى ص = د(س) ، إذا كانت قيمة $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ هي الميل (م) عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، فإن معادلة مماس المنحنى عند تلك النقطة تعطى من خلال إحدى الصيغ التالية:

- ص = م س + جـ ، حيث م = د′(س$_{١}$) ، جـ = ص$_{١}$ - م س$_{١}$
- ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$)

مثال ٧

د(س) = ٤س^{٣} - ٩س^{٢} + ٣س معادلة منحنى، أوجد: أ) د′(س) ب) ميل المنحنى عند س = ١ جـ) معادلة مماس المنحنى د(س) = ٤س^{٣} - ٩س^{٢} + ٣س عند س = ١

الحل

أ) د′(س) = $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$(٤س^{٣} - ٩س^{٢} + ٣س) (أوجد المشتقة بالنسبة إلى س لإيجاد دالة الميل)

= ٤ × ٣س^{٢} - ٩ × ٢س + ٣

= ١٢س^{٢} - ١٨س + ٣

ب) د′(١) = ١٢ × (١)^{٢} - ١٨ × ١ + ٣ = ١٢ - ١٨ + ٣ = -٣

(بالتعويض عن س = ١ في دالة الميل)

∴ عند س = ١ ، الميل يساوي -٣

جـ) ص = ٤(١)^{٣} - ٩(١)^{٢} + ٣ × ١ = -٢ (بالتعويض عن س = ١ في معادلة المنحنى لإيجاد الإحداثي الصادي للنقطة)

ميل المماس يساوي -٣ ويمر بالنقطة (١ ، -٢)

ص = -٣س + جـ

جـ = ص - (-٣س) = ص + ٣س = -٢ + ٣ × ١ = ١

معادلة المماس: ص = -٣س + ١ أو ص = ١ - ٣س

مثال ٨

رُسم مماس على المنحنى د(س) = س^{٢} - ٤س - ٥ عند النقطة (٠ ، -٥). أوجد معادلة هذا المماس.

الحل

د′(س) = $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$(س^{٢} - ٤س - ٥) = ٢س - ٤ (أوجد المشتقة بالنسبة إلى س لإيجاد دالة الميل)

د′(٠) = ٢ × ٠ - ٤ = -٤ (بالتعويض عن س = ٠ في دالة الميل)

∴ عند س = ٠ ، الميل يساوي -٤

المماس يمر بالنقطة (٠ ، -٥) إذًا جـ = -٥

معادلة المماس: ص = -٤س - ٥

ملاحظة الكتاب: إذا كان المماس يمر بالنقطة (٠ ، ص) فإن الجزء المقطوع من محور الصادات (جـ) يساوي قيمة الإحداثي الصادي.

khaled-math.surge.sh

مثال ٩

د(س) = ٨ - $\frac{٨}{س}$ معادلة منحنى، أوجد: أ) قيمة ب، إذا كانت النقطة ($\frac{١}{٢}$ ، ب) تقع على المنحنى. ب) دالة الميل للمنحنى. ج) معادلة مماس المنحنى عند النقطة حيث س = $\frac{١}{٢}$

الحل

أ) ص = ٨ - $\frac{٨}{س}$

ب = ٨ - ٨ ÷ $\frac{١}{٢}$ = ٨ - ١٦ = -٨ (عوّض س = ١/٢ في معادلة المنحنى)

ب) د′(س) = $\frac{د}{د س}$(٨ - $\frac{٨}{س}$) = $\frac{د}{د س}$(٨ - ٨س$^{-١}$)

= ٠ - ٨ × (-١)س$^{-٢}$

= $\frac{٨}{س^{٢}}$ (أوجد مشتقة كل حدّ واستخدم قانوني الجمع أو الطرح)

ج) د′($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٨}{(\frac{١}{٢})^{٢}}$ = ٣٢ (بالتعويض عن س = ١/٢ في صيغة د′(س))

ميل المماس يساوي ٣٢ ويمر بالنقطة ($\frac{١}{٢}$ ، -٨)

ص = ٣٢س + جـ

جـ = ص - ٣٢س = -٨ - ٣٢ × $\frac{١}{٢}$ = -٢٤

معادلة المماس: ص = ٣٢س - ٢٤

تمارين ٢-٣

١) رُسم مماس على منحنى معادلته ص = س^{٢} عند النقطة (٢ ، ٤)، أوجد:

أ) د′(س) ب) ميل المماس جـ) معادلة هذا المماس في الصيغة ص = م س + جـ

٢) رُسم مماس على منحنى معادلته ص = ٦ + ٨س - ٢س^{٢} عند النقطة (٠ ، ٦)، أوجد:

أ) د′(س) ب) ميل المماس جـ) معادلة هذا المماس في الصيغة ص = م س + جـ

٣) أوجد معادلة المماس للمنحنيات الآتية عند النقاط المعطاة:

أ) د(س) = س^{٣} + ٧ عند النقطة على المنحنى حيث س = ١

ب) د(س) = $\frac{١}{٢}$س^{٢} + س - ٢ عند النقطة على المنحنى حيث س = ٢ جـ) د(س) = ٢٠ - ٢س - س^{٢} عند النقطة على المنحنى حيث س = ٠ د) د(س) = س^{٤} - ٣س عند النقطة على المنحنى حيث س = ١ هـ) د(س) = $\frac{١}{س}$ + س عند النقطة على المنحنى حيث س = -١ و) د(س) = (٢س + ٣)(س - ٦) عند النقطة على المنحنى حيث س = ٥

٤) بيّن أن الميل على المنحنى ص = س^{٢} + ٩ يساوي الميل على المنحنى ص = س^{٢} - ٩ لكل قيم س

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٥) رُسم مماس على المنحنى ص = س^{٢} - ١٢س + ٤٣ عند النقطة (٥ ، ٨). أ) بيّن أن ميل المماس يساوي -٢ ب) أوجد إحداثيات النقطة التي يقطع هذا المماس عندها المحور السيني.

٦) رُسم مماسان على المنحنى ص = س^{٢} - ٣س + ٨ عند النقطتين حيث س = ١ ، س = ٢. يبيّن الرسم الآتي أجزاء من المنحنى والمماسَين. أوجد معادلة كل من المماسَين.

الرسم في كتاب الطالب صفحة ٦٠ (منحنى أحمر ومماسان متقاطعان).

تمارين ٢-٣ (٧)

٧) يمكن حساب المسافة التي قطعها جزيء انطلاقًا من نقطة البداية ص متر، من خلال الصيغة ص = ٣س - ٠٫٠١س^{٢} ، حيث س يمثل الزمن بالثواني.

أ) كم يبعد الجزيء عن نقطة البداية بعد ١٠ ثوانٍ؟

ب) تعبّر دالة الميل $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عن سرعة الجزيء عند أية نقطة خلال رحلته، أوجد: ١) سرعة الجزيء. ٢) سرعة الجزيء بعد ٢٠ ثانية.

مساعدة (الكتاب): السرعة هي قياس التغير في المسافة (ص) لكل وحدة من الزمن (س)، لذا فإن السرعة تساوي مشتقة المسافة.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٣

تمرين ١: أ) ٢س | ب) ٤ | جـ) ص = ٤س - ٤

تمرين ٢: أ) ٨ - ٤س | ب) ٨ | جـ) ص = ٨س + ٦

تمرين ٣: أ) ص = ٣س + ٥ | ب) ص = ٣س - ٤ | جـ) ص = -٢س + ٢٠ | د) ص = س - ٣ | هـ) ص = -٢ | و) ص = ١١س - ٦٨

تمرين ٤: مشتقة كل منهما ٢س (الثابت ٩ أو -٩ مشتقته صفر)

تمرين ٥: أ) د′(٥) = ٢×٥ - ١٢ = -٢ | ب) ص = -٢س + ١٨ ، تقطع المحور السيني عند (٩ ، ٠)

تمرين ٦: عند س = ١: ص = -س + ٧ | عند س = ٢: ص = س + ٤

تمرين ٧: أ) ٢٩,٩ م | ب) السرعة = ٣ - ٠,٠٠٢س | ٢) ٢,٩٦ م/ث

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٢-٤ المشتقة الثانية

عند إيجاد مشتقة ص بالنسبة إلى س، نحصل على $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ تسمى **المشتقة الأولى (first derivative)** لـ ص بالنسبة إلى س

وإذا أوجدنا مشتقة $\frac{د ص}{د س}$ بالنسبة إلى س، نحصل على

$\frac{د}{د س}(\frac{د ص}{د س})$، والتي نكتبها عادة على الشكل $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$

رموز المشتقة الثانية

وباستخدام ترميز الدوال يكون رمز المشتقة الأولى هو د′(س) والمشتقة الثانية هو د″(س)

تسمى كل من $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ ، د″(س) **المشتقة الثانية (second derivative)** لـ ص بالنسبة إلى س

مثال على المشتقتين

فمثلًا ص = $س^٣ + ٥س^٢ - ٣س + ٢$ أو

د(س) = $س^٣ + ٥س^٢ - ٣س + ٢$

$\frac{د ص}{د س} = ٣س^٢ + ١٠س - ٣$ أو د′(س) = $٣س^٢ + ١٠س - ٣$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = ٦س + ١٠$ أو د″(س) = $٦س + ١٠$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ١٠

إذا كان ص = د(س) = ٢س^{٣} - $\frac{١}{٢}$س^{٢} + ٧س - ١١ أ) أوجد د′(س) ب) أوجد د″(س) جـ) عند س = -١: ١) أوجد قيمة المشتقة الأولى. ٢) حدّد ما إذا كانت قيمة المشتقة الثانية موجبة أو سالبة.

الحل

أ) د′(س) = $\frac{د}{د\ س}$(٢س^{٣} - $\frac{١}{٢}$س^{٢} + ٧س - ١١) (أوجد مشتقة ص بالنسبة إلى س)

= ٢ × ٣س^{٢} - $\frac{١}{٢}$ × ٢س + ٧ - ٠

= ٦س^{٢} - س + ٧

ب) د″(س) = $\frac{د^{٢}\ ص}{د\ س^{٢}}$ = $\frac{د}{د\ س}$(٦س^{٢} - س + ٧) (أوجد مشتقة د′(س) بالنسبة إلى س)

= ١٢س - ١

جـ) ١) د′(-١) = ٦(-١)^{٢} - (-١) + ٧ = ٦ + ١ + ٧ = ١٤ (عوّض س = -١ في المشتقة الأولى)

٢) د″(-١) = ١٢(-١) - ١ = -١٣ (عوّض س = -١ في المشتقة الثانية)

قيمة المشتقة الثانية سالبة عند س = -١

مثال ١١

أوجد قيمة س التي تجعل المشتقة الثانية للدالة
د(س) = ٧س^{٣} + ٣س^{٢} - ٥س + ١ تساوي ١١

الحل

د(س) = ٧س^{٣} + ٣س^{٢} - ٥س + ١

د′(س) = ٢١س^{٢} + ٤س - ٥ (أوجد مشتقة د(س) لإيجاد المشتقة الأولى)

د″(س) = ٤٢س + ٤ (أوجد مشتقة د′(س) لإيجاد المشتقة الثانية)

٤٢س + ٤ = ١١ (المشتقة الثانية تساوي ١١)

$$س = \frac{١١ - ٤}{٤٢} = \frac{١}{٦}$$

تمارين ٢-٤

١) أوجد المشتقة الثانية لكل ممّا يأتي:

أ) ص = ٤س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٦ ب)

ص = $\frac{٢}{٣}$س^{٣} + $\frac{٥}{٢}$س^{٢} - ١٥ جـ)

ص = ٢٠ - ٧س + ٣س^{٢} - ٨س^{٣} د) ص = ٣س^{٢} + ٧س - ٣ هـ)

د(س) = $\frac{٥}{٦}$س^{٣} + ١٧س و) د(س) = ١ - $\frac{٣}{٨}$س^{٤} + س^{٥} ز)

د(س) = $\frac{١٠}{س}$ ح) د(س) = (٣س^{٢} - ٢س + ٦)(س + ٤)

٢) إذا كان د(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٣س + ٤ ، فأوجد قيمة: أ) د(٢) ب) د′(٢) ج) د″(٢)

٣) أوجد قيمة س التي تجعل المشتقة الثانية للدالة: أ) د(س) = ٨س^{٣} + ٥س^{٢} - ١٢س + ٢ تساوي ٢٦ ب) د(س) = $\frac{٣}{٤}$ س^{٣} + ٨س^{٢} تساوي ١٠ ج) د(س) = ٦س^{٣} - ٣س^{٢} + س مساوية للمشتقة الثانية للدالة ف(س) = ٢س + ٨س^{٢} - ٤س^{٣}

٤) قيمة المشتقة الثانية للدالة ص = ٧س^{٣} - أ س^{٢} + ٥ س تساوي ٤ عند س = ٢ ، أوجد قيمة الثابت أ

٥) قيمة المشتقة الثانية للدالة د(س) = ٣٠ - ٢س + ٣س^{٢} - س^{٣} تساوي ٨ عند س = أ ، أوجد: أ) قيمة الثابت أ ب) ميل المنحنى د(س) = ٣٠ - ٢س + ٣س^{٢} - س^{٣} عند النقطة حيث س = ٣أ

تمارين ٢-٤ (٦)

٦) يمكن حساب المسافة التي قطعها جزيء انطلاقًا من نقطة البداية ص متر، من خلال الصيغة ص = ٢س + ١٥س^{٢} - $\frac{٢}{٣}$ س^{٣}، حيث س يمثل الزمن بالثواني.

أ) كم يبعد الجزيء عن نقطة البداية بعد ٣ ثوانٍ؟

ب) تعطي المشتقة الثانية $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ صيغة لتسارع الجزيء عند أية نقطة خلال رحلته، أوجد: ١) تسارع الجزيء. ٢) تسارع الجزيء بعد ٥ ثوانٍ.

مساعدة (الكتاب): التسارع يساوي المشتقة الأولى للسرعة، أي أنه يساوي المشتقة الثانية للمسافة.

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٤

تمرين ١: أ) ٢٤س - ٦ | ب) ٤س + ٥ | ج) ٦ - ٤٨س | د) ٤ | هـ) ٥س | و) $-\frac{٩}{٢}$س^{٢} + ٢٠س^{٣} | ز) $\frac{٢٠}{س^{٣}}$ | ح) ١٨س + ٢٠

تمرين ٢: أ) ٢٦ | ب) ٢٣ | ج) ١٦

تمرين ٣: أ) س = $\frac{١}{٣}$ | ب) س = $-\frac{٤}{٣}$ | ج) س = $\frac{١١}{٣٠}$

تمرين ٤: أ = ٤٠ | **تمرين ٥:** أ) أ = $-\frac{١}{٣}$ | ب) -١١

تمرين ٦: أ) ١٢٣ م | ب) ١) ٣٠ - ٤س | ٢) ١٠ م/ث^{٢}

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٢-٥ الدوال المتزايدة والمتناقصة

استكشاف ٣

١) يبيّن التمثيل الآتي منحنى ص = د(س). أكمل العبارات الآتية عن ص = د(س) في المجال المبيّن في المخطط:

كلما تزايدت قيمة س، ..... قيمة ص

إشارة الميل عند أي نقطة هي دائمًا .....

هل الدالة متزايدة أم متناقصة؟

الرسم في كتاب الطالب صفحة ٦٤ (منحنى يصعد من اليسار إلى اليمين).

استكشاف ٣ (٢)

٢) يبيّن التمثيل الآتي منحنى ص = ف(س). أكمل العبارات الآتية عن ص = ف(س) في المجال المبيّن في المخطط:

كلما تزايدت قيمة س، ..... قيمة ص

إشارة الميل عند أي نقطة هي دائمًا .....

هل هذا النوع من الدوال هو دوال متزايدة أم متناقصة؟

الرسم في كتاب الطالب صفحة ٦٤ (منحنى يهبط من اليسار إلى اليمين).

استكشاف ٣ (٣)

٣) خذ الآن منحنيَي الدالتين د(س) = س^{٢} ، هـ(س) = -س^{٢} ، وهما مرسومان في المخطط (كتاب الطالب صفحة ٦٥).

أكمل العبارات الآتية:

أ) د(س) = س^{٢} متزايدة في الفترة .....

ب) د(س) = س^{٢} متناقصة في الفترة .....

جـ) هـ(س) = -س^{٢} متزايدة في الفترة .....

د) هـ(س) = -س^{٢} متناقصة في الفترة .....

الدالة المتزايدة والمتناقصة

من خلال استكشاف ٣، تكون الدالة د(س) **متزايدة** إذا تزايدت قيم د(س) كلما تزايدت قيم س، إذا كان د(س$_{١}$) < د(س$_{٢}$) لكل س$_{١}$ < س$_{٢}$

بطريقة مماثلة، تكون الدالة د(س) **متناقصة** إذا تناقصت قيم د(س) كلما تزايدت قيم س، إذا كان د(س$_{١}$) > د(س$_{٢}$) لكل س$_{١}$ < س$_{٢}$

الدالة عند نقطة

كما يمكننا دراسة تزايد دالة عند نقطة، ونعني بذلك أن قيم الدالة متزايدة **حول** هذه النقطة.

إذا كان ميل الدالة موجبًا عند نقطة ما تكون الدالة متزايدة عند تلك النقطة.

JLD6_JLD
khaled-math.surge.sh

بالطريقة نفسها تكون دالة متناقصة عند نقطة ما، **إذا كان ميل الدالة سالبًا عند تلك النقطة.**

قسما التمثيل البياني

يمكننا تقسيم التمثيل البياني إلى قسمَين مختلفَين:

• تتزايد د(س) عندما س < أ ، أي أن د′(س) > ٠

• تتناقص د(س) عندما س > أ ، أي أن د′(س) < ٠

أي أن:

• تتزايد د(س) عند س = ل إذا كان د′(ل) > ٠

• تتناقص د(س) عند س = م إذا كان د′(م) < ٠

أما النقطة التي يلتقي عندها القسمان (س = أ) فيكون ميل المنحنى عندها صفرًا، أي د′(أ) = ٠

نتيجة ٧

نتيجة ٧

تكون الدالة ص = د(س) في الفترة المعطاة لـ س:

• متزايدة إذا كان د′(س) = $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ > ٠ على كامل الفترة.

• متناقصة إذا كان د′(س) = $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ < ٠ على كامل الفترة.

مثال ١٢

بيّن أن د(س) = س^{٢} - ٦س + ١١ : أ) متناقصة عند س = ١
ب) متزايدة في الفترة ٤ ≥ س ≥ ١٠

الحل

د(س) = س^{٢} - ٦س + ١١

د′(س) = ٢س - ٦ (أوجد المشتقة)

أ) د′(١) = ٢ × ١ - ٦ = -٤ (عوّض س = ١ في المشتقة)

∵ د′(١) < ٠ (اكتب ما تعنيه نتيجتك)

∴ د(س) = س^{٢} - ٦س + ١١ متناقصة عند س = ١

حل مثال ١٢ (ب)

ب) د′(س) = ٢س - ٦

د′(٤) = ٢ × ٤ - ٦ = ٢ ، د′(١٠) = ٢ × ١٠ - ٦ = ١٤ (عوّض س = ٤ ، س = ١٠ في المشتقة)

∴ د′(٤) > ٠ ، د′(١٠) > ٠

∴ تكون الدالة د(س) في الفترة ٤ ≥ س ≥ ١٠ متزايدة

إيجاد الإحداثي الصادي لنقطتَي النهاية للفترة يؤكد كذلك أن الدالة متزايدة: د(٤) = (٤)^{٢} - ٦ × ٤ + ١١ = ٣ ،
د(١٠) = (١٠)^{٢} - ٦ × ١٠ + ١١ = ٥١

مثال ١٣

أوجد مجموعة قيم س التي تجعل الدالة
د(س) = ٢١ + ٤س - س^{٢} : أ) متناقصة. ب) متزايدة.

الحل

د(س) = ٢١ + ٤س - س^{٢}

د′(س) = ٤ - ٢س (أوجد المشتقة)

أ) تتناقص د(س) عندما د′(س) < ٠

٤ - ٢س < ٠

-٢س < -٤

س > ٢

د(س) = ٢١ + ٤س - س^{٢} متناقصة عندما س > ٢

ب) تتزايد د(س) عندما د′(س) > ٠

٤ - ٢س > ٠

س < ٢

د(س) = ٢١ + ٤س - س^{٢} متزايدة عندما س < ٢

مساعدة (الكتاب): تذكر أنه يجب عكس إشارة التباين عند ضرب أو قسمة طرفَي المتباينة بعدد سالب.

تمارين ٢-٥

١) حدد ما إذا كانت كل من الدوال الآتية متزايدة أو متناقصة عند النقطة أو الفترة المعطاة:

أ) ص = س^{٢} - ٦س عند س = ٤ ب) ص = س^{٢} - ٨س + ١٠ عند س = ٣ ج) ص = ٦ - س - س^{٢} عند س = ١ د) د(س) = ٢س^{٢} + ٥س + ١ عند س = -١ هـ) د(س) = $\frac{١}{٢}$س^{٢} - ٣س + ١٧ عند س = -$\frac{١}{٢}$ و) د(س) = (٥ - ٢س)(٨ + س) عند س = -$\frac{٥}{٢}$ ز) د(س) = ٣س^{٢} - ١٤س + ٩ في الفترة ٣ ≤ س ≤ ٩ ح) د(س) = ٥ - ١٥س - ٣س^{٢} في الفترة -١ ≤ س ≤ ٢

٢) أوجد مجموعة قيم س التي تجعل الدالة: أ) د(س) = س^{٢} + ١٠س - ١٢ متناقصة. ب) د(س) = ٥س^{٢} - ١١س + ٣ متزايدة. ج) د(س) = $\frac{٣}{٤}$س^{٢} + $\frac{١}{٢}$س - ٥ متزايدة. د) د(س) = ٨ - ٢س - $\frac{٦}{٥}$س^{٢} متناقصة. هـ) د(س) = ١ - ١٤س - $\frac{٧}{٢}$س^{٢} متزايدة.

و) د(س) = (٢س - ٥)(٣س + ٤) متناقصة.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٥ (٣، ٤)

٣) تنتج شركة تصنيع س سلعة في اليوم. يمكن كتابة دالة الربح ل(س) من خلال الصيغة ل(س) = ٠٫٠٠٤س^{٣} - ٠٫٦س ، أوجد قيم س التي تجعل الربح متزايدًا.

٤) بيّن أن الدالة د(س) = س - ٨ - س^{٢} متناقصة في الفترة ١ ≤ س ≤ ٦

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٥

تمرين ١: أ) متزايدة (د′(٤) = ٢) | ب) متناقصة (-٢) | ج) متناقصة (-٣) | د) متزايدة (١) | هـ) متزايدة (٣,٥) | و) متناقصة (-١) | ز) متزايدة (د′ = ٦س - ١٤ موجبة على الفترة) | ح) متناقصة (د′ = -١٥ - ٦س سالبة على الفترة)

تمرين ٢: أ) س < -٥ | ب) س > $\frac{١١}{١٠}$ | ج) س > -$\frac{١}{٣}$ | د) س > -$\frac{٥}{٦}$ | هـ) س < -٢ | و) س < $\frac{٧}{١٢}$

تمرين ٣: ل′(س) = ٠٫٠٠٨س - ٠٫٦ > ٠ ، إذًا س > ٧٥

تمرين ٤: د′(س) = ١ - ٢س ، وهي سالبة لكل س ≥ ١ ، إذًا الدالة متناقصة في الفترة ١ ≥ س ≥ ٦

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

منصة الأستاذ خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية (١-٤)

١) أوجد ميل المنحنى ص = د(س) = -٤س^{٢} - ١١س - ١٨ عند النقطة حيث س = -٢

٢) أوجد الإحداثيات السينية والصادية للنقطة على منحنى ص = د(س) = ٩س - س^{٢} حيث الميل يساوي ١

٣) لمنحنى ص = د(س) = أس^{٣} + ٥س^{٢} + ٢س - ١ ميل يساوي ٧ عند النقطة حيث س = -١ أوجد قيمة الثابت أ

٤) أوجد معادلة المماس لمنحنى
ص = د(س) = ٨ + ٢س - ٧س^{٢} عند النقطة (٢ ، -١٦)

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية (٥-٨)

٥) أوجد قيمة المشتقة الثانية للدالة
د(س) = ١٢س - س^{٦} - ٥س^{٣} عند س = -١

٦) أوجد قيمة س التي تجعل المشتقة الثانية للدالة
د(س) = ٣س^{٣} - س^{٢} + ٩س + ٤ تساوي ٧

٧) حدد ما إذا كانت الدالة د(س) = ٧ - ٣س - ٢س^{٢} متزايدة أو متناقصة عند س = -١

٨) أوجد مجموعة قيم س التي تجعل الدالة

د(س) = -١١ - $\frac{٩}{٢}$س - $\frac{٥}{٢}$س^{٢} متناقصة.

ورقة الإجابات النموذجية (المراجعة)

١) د′(س) = −٨س − ١١ ، د′(−٢) = ١٦ − ١١ = ٥

٢) د′(س) = ٩ − ٢س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٣٦ − ١٦ = ٢٠ ، النقطة (٤ ، ٢٠)

٣) د′(س) = ٣أس^{٢} + ١٠س + ٢ ، د′(−١) = ٣أ − ١٠ + ٢ = ٧ ، أ = ٥

٤) د′(س) = ٢ − ١٤س ، د′(٢) = −٢٦ ، ص + ١٦ = −٢٦(س − ٢) ، ص = −٢٦س + ٣٦

٥) د′(س) = ١٢ − ٦س^{٥} − ١٥س^{٢} ، د″(س) = −٣٠س^{٤} − ٣٠س ، د″(−١) = −٣٠ + ٣٠ = ٠

٦) د″(س) = ١٨س − ٢ = ٧ ، س = $\frac{١}{٢}$

٧) د′(س) = −٣ − ٤س ، د′(−١) = ١ وهي موجبة ، إذًا الدالة متزايدة

٨) د′(س) = −$\frac{٩}{٢}$ − ٥س < ٠ ، إذًا س > −$\frac{٩}{١٠}$

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات. في تمرين ١ قرأت الدالة −٤س^{٢} − ١١س − ١٨ كما هي مطبوعة (١٨ ثابت).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh