٣-١ المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة)

يكون متغير ما عشوائيًّا متقطعًا إذا أمكن أن يأخذ مجموعة قيم قابلة للعد ضمن مجال معيّن، وتحدث هذه القيم بشكل عشوائي.

مثلًا، عدد الإجابات الصحيحة الممكنة في اختبار قصير مكوّن من ستة أسئلة هو متغيّر عشوائي متقطع يمكن أن يتخذ أيًّا من القيم ٠ أو ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦

الرمز س

نلاحظ أنه يمكننا عد القيم (وهي سبع)، ويمكن أن نرمز إليها باستخدام الرمز (س)، حيث

$$س \in \{٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$$

يحدث **المتغير العشوائي المتقطع المنفصل** (Discrete random variable) في الكثير من الحالات التي نقوم فيها باختيارات مستقلة (حيث نختار العناصر مع إرجاع) وكذلك حالات نقوم فيها باختيارات غير مستقلة (حيث نختار العناصر دون إرجاع).

مثال ١

تمّ رمي حجرَي نرد منتظمَين.

يمثل المتغيّر العشوائي المتقطع (و) عدد مرات ظهور الرقم ٥

يمثل المتغيّر العشوائي المتقطع (ت) مجموع العددين الناتجَين.

أ) اكتب القيم الممكنة للمتغيّر (و).

ب) استخدم مخطط احتمال ثم:

١) اكتب القيم الممكنة للمتغيّر (ت).

٢) أوجد قيمة (ت) الأكثر احتمالًا.

حل مثال ١ (أ)

الحلّ

أ) و ∈ {٠ ، ١ ، ٢}

ربما لا نحصل على الرقم ٥ أو نحصل عليه مرة أو مرتين.

حل مثال ١ (ب ١)

مخطط الاحتمال: الرمية الأولى في الأعلى والرمية الثانية على الجانب (مجموع العددين).

+	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢

ت ∈ {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢}

حل مثال ١ (ب ٢)

المجموع الأصغر الممكن هو ٢ (عندما نحصل على ١ ، ١).

المجموع الأكبر الممكن هو ١٢ (عندما نحصل على ٦ ، ٦).

يبيّن مخطط الاحتمال أنه يوجد ٣٦ ناتجًا.

الحلّ

٢) قيمة (ت) الأكثر احتمالًا لمجموع العددين الناتجين هي **٧**
الناتج الأكثر احتمالًا هو الناتج الذي يظهر أكبر عدد من المرات مقارنة مع النواتج الأخرى، وهو ٧

مثال ٢

يحتوي كيس على خمس بطاقات مرقمة ١ ، ٢ ، ٢ ، ٣ ، ٥ .
تمّ سحب بطاقتين من الكيس دون إرجاع.
أ) يمثل المتغيّر العشوائي المتقطع (ت) مجموع الأرقام على البطاقتين المختارتَين.
ا) أنشئ مخطط احتمال يبيّن وجود ٢٠ ناتجًا ممكنًا.
٢) اكتب القيم الممكنة للمتغيّر (ت).

حل مثال ٢ (أ)

يتم اختيار أول بطاقة من أصل ٥ بطاقات، ثم ثاني بطاقة من ٤ بطاقات متبقية. تشير علامات × إلى استحالة اختيار البطاقة نفسها مرتين. (البطاقة الأولى في الأعلى، والثانية على الجانب)

+	١	٢	٢	٣	٥
١	×	٣	٣	٤	٦
٢	٣	×	٤	٥	٧
٢	٣	٤	×	٥	٧
٣	٤	٥	٥	×	٨
٥	٦	٧	٧	٨	×

٢) ت ∋ {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨}

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ٢ (ب)

ب) يشكّل المتغيّر العشوائي المتقطع (د) الفرق (غير السالب) بين الأرقام على البطاقتين المختارتَين.

أوجد:

ا) القيم الممكنة للمتغيّر (د).

٢) القيمة الأكثر احتمالًا للمتغير (د)، والقيمة الأقل احتمالًا للمتغير (د).

حل مثال ٢ (ب)

–	ا	٢	٢	٣	٥
ا	×	ا	ا	٢	٤
٢	ا	×	٠	ا	٣
٢	ا	٠	×	ا	٣
٣	٢	ا	ا	×	٢
٥	٤	٣	٣	٢	×

ا) د ∈ {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}.

٢) القيمة الأكثر احتمالًا للمتغيّر (د) هي ١

والقيمتان الأقل احتمالًا للمتغيّر (د) هما ٠ ، ٤

تمارين ٣-١

ا) تمّ تدوير قرص دوّار منتظم مرقم ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٧ مرتين. ثم جُمع الرقمان الناتجان ليكون المجموع المتغيّر (س).

أ) أنشئ مخطط احتمال واستخدمه لإيجاد:

١) أكبر قيمة ممكنة للمتغيّر (س).

٢) أقل قيمة ممكنة للمتغيّر (س).

ب) اكتب كل القيم الممكنة للمتغيّر (س).

ج) اكتب القيمة الأكثر احتمالًا للمتغيّر (س).

الشكل في كتاب الطالب صفحة ٧٥.

تمارين ٣-١ (٢)

٢) شارك ثلاثة أولاد من الصف العاشر وولدين من الصف التاسع في سباق طوله ٣ كم. تجد أدناه ثلاثة متغيرات عشوائية متقطعة:

• (ج) هو عدد الأولاد الذين يكملون السباق في أقل من ٢٠ دقيقة.

• (ف) هو عدد الأولاد من الصف العاشر الذين يكملون السباق في أقل من ٢٠ دقيقة.

• (ب) هو عدد الأولاد من الصف التاسع الذين يكملون السباق في أقل من ٢٠ دقيقة.

أ) اكتب القيم الممكنة للمتغيّر (ج).

ب) أوجد عدد القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي المتقطع:

١) (ف)

٢) (ب)

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٣-١ (٣)

٣) يوجد في كيس ٦ حبات من التفاح. اثنتان منها خضراء، ٣ منها حمراء، وواحدة منها صفراء. تسحب فتاة بشكل عشوائي ٤ حبات تفاح من الكيس.

أ) أوجد القيم الممكنة للمتغيّر (خ) عدد حبات التفاح الخضراء المختارة.

ب) أوجد القيم الممكنة للمتغيّر (خ') عدد حبات التفاح المختارة التي ليست خضراء.

مساعدة: ل(خ') = ١ − ل(خ)

تمارين ٣-١ (٤)

٤) لدى مزارع ٤ عنزات و ٥ بقرات. سيتم اختيار (ن) من هذه الحيوانات بشكل عشوائي ليتم فحصها.

عدد العنزات المختارة (ع) متغيّر عشوائي متقطع، وحيث ع ∋ {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}.

عدد البقرات المختارة (ب) متغيّر عشوائي متقطع، وحيث ب ∋ {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}.

أوجد قيمة (ن).

تمارين ٣-١ (٥)

٥) تمّ رمي ٣ أسهم بشكل عشوائي باتجاه لوح دائري بحيث يعلق السهم في مقطع مرقم كما هو مبيّن أدناه. يُعتبر رقم المقطع حيث يعلق السهم نتيجة ذلك السهم.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

يمثل المتغيّر العشوائي المتقطع (س) مجموع نواتج الأسهم الثلاثة.

يمثل المتغيّر العشوائي المتقطع (ص) حاصل ضرب نواتج الأسهم الثلاثة.

على سبيل المثال، إذا كانت نواتج الأسهم الثلاثة (٢ ، ٢ ، ٣) فإن س = ٢ + ٢ + ٣ = ٧

إذا كانت نواتج الأسهم الثلاثة (٢ ، ١ ، ٣) فإن ص = ٢ × ١ × ٣ = ٦

الشكل في كتاب الطالب صفحة ٧٦.

تمارين ٣-١ (٥) تابع

أ) أعطِ مثالًا لكل من النواتج الممكنة لكل من الأسهم الثلاثة بحيث:

١) س > ص

٢) س = ص

٣) س < ص

ب) أوجد الفرق بين:

١) أكبر قيمة ممكنة للمتغيّر (ص) وأصغر قيمة ممكنة للمتغيّر (س).

٢) أكبر قيمة ممكنة للمتغيّر (س) وأصغر قيمة ممكنة للمتغيّر (ص).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٣-١ (٦)

٦) بقي في حافلة مقاعد خالية لـ ٤ ركاب إضافيين فقط. في موقف الحافلات ٥ نساء ورجل واحد و ٣ أولاد ينتظرون صعود الحافلة. يقرر سائق الحافلة اختيار ٤ من هؤلاء الأشخاص عشوائيًا لصعود الحافلة. تجد أدناه ثلاثة متغيّرات عشوائية متقطعة:

• (و) هو عدد النساء اللواتي تمّ اختيارهن عشوائيًا لصعود الحافلة.

• (م) هو عدد الرجال الذين تمّ اختيارهم عشوائيًا لصعود الحافلة.

• (ج) هو عدد الأولاد الذين تمّ اختيارهم عشوائيًا لصعود الحافلة.

أ) اكتب القيم الممكنة للمتغيّر (و).

تمارين ٣-١ (٦ ب)

ب) يرى السائق أن امرأة مسنة وابنتها من ضمن الذين ينتظرون لصعود الحافلة، فيسمح لهما بالصعود قبل أن يختار الباقية عشوائيًا من بين الآخرين الذين ينتظرون دورهم.

اشرح أثر قرارات السائق على القيم الممكنة للمتغيّر:

١) (م)

٢) (ج)

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٧) أعطِ سببًا موجزًا لعدم كون كل من الآتي متغيرًا عشوائيًا متقطعًا:

أ) أطوال الأشجار في الحديقة.

ب) عدد الأشخاص الذين زاروا الحديقة يوم السبت.

٣-٢ التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع

التوزيع الاحتمالي (probability distribution) لمتغيّر عشوائي متقطع هو عرض لكل قيمة من قيم المتغير واحتمال حدوثها.

الطريقة المعتادة للعرض هي من خلال وضع القيم واحتمالاتها في جدول يسمى جدول التوزيع الاحتمالي.

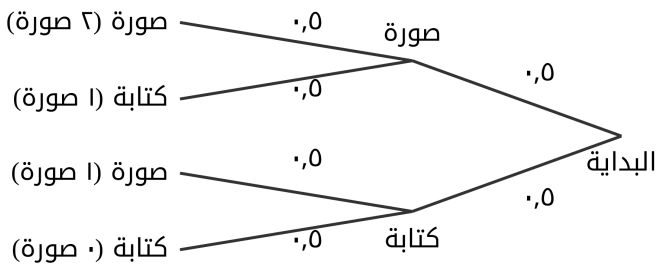
مثال: رمي قطعة نقدية مرتين

فمثلًا إذا رمينا قطعة نقدية منتظمة مرتين، يمكن أن نحصل على ٠ أو ١ أو ٢ صورة، وعليه فإن عدد الصور الناتجة في كل محاولة يرمز إليه بـ (س) وهو متغيّر عشوائي متقطع حيث

س ∈ {٠ ، ١ ، ٢}

لكل رمية ل(صورة) = ل(كتابة) = ٠,٥

يبيّن مخطط الشجرة الآتي النواتج الممكنة:



الرمية الأولى: صورة أو كتابة، ثم الرمية الثانية. (الشكل في كتاب الطالب صفحة ٧٧)

حساب الاحتمالات

ل(٢) = ل(صورة ، صورة) = ٠٫٥ × ٠٫٥ = ٠٫٢٥

ل(١) = ل(صورة ، كتابة) + ل(كتابة ، صورة)

= (٠٫٥ × ٠٫٥) + (٠٫٥ × ٠٫٥) = ٠٫٥

ل(٠) = ل(كتابة ، كتابة) = ٠٫٥ × ٠٫٥ = ٠٫٢٥

جدول التوزيع الاحتمالي

عندما نرمي قطعة نقدية منتظمة مرتين، فمن المتوقع أن لا تظهر صورة في ٢٥٪ من المحاولات، و ٥٠٪ تظهر فيها صورة واحدة، وتظهر صورتان في ٢٥٪ من المحاولات.

بيّن جدول التوزيع الاحتمالي الآتي كل القيم الممكنة للمتغيّر (س) مع احتمالات حدوثها.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

س	٠	١	٢
ل(س)	٠,٢٥	٠,٥٠	٠,٢٥

احتمالات القيم الممكنة للمتغيّر (س) مساوية للتكرارات النسبية لـ قيم (س).

نتيجة ١

نتيجة ١

٠ ≤ ل(س) ≤ ١

مجموع الاحتمالات في جدول التوزيع الاحتمالي = ١

وتكتب ∑ ل(س) = ١

مساعدة: ∑ ل(س) = ١ لأنه من المؤكد وقوع إحدى قيم المتغير العشوائي عند إجراء التجربة.

مثال ٣

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س).

مثال ٣ (تابع)

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ل(س)	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{١٢}$

استخدم جدول التوزيع الاحتمالي لإيجاد:

أ) ل(س > ٤)

ب) ل(س ≥ ٣)

ج) ل(س ≠ ٥)

حل مثال ٣ (أ، ب)

الحلّ

أ) ل(س > ٤) = ل(٥) + ل(٦)

$$= \frac{٢}{١٢} + \frac{١}{١٢}$$

$$= \frac{٣}{١٢} = \frac{١}{٤}$$

توجد قيمتان للمتغير (س) أكبر من ٤، لذا نجمع احتماليهما

الحلّ

ب) ل(س ≥ ٣) = ل(١) + ل(٢) + ل(٣)

$$= \frac{١}{١٢} + \frac{٢}{١٢} + \frac{٣}{١٢}$$

$$= \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$$

توجد ثلاث قيم للمتغير (س) أصغر من أو تساوي ٣، لذا نجمع احتمالاتها

حل مثال ٣ (ج)

الحلّ

ج) ل(س ≠ ٥) = ١ − ل(٥)

$$= ١ - \frac{٢}{١٢}$$

$$= \frac{١٠}{١٢} = \frac{٥}{٦}$$

تذكّر أن ل(لا تساوي س) = ١ − ل(س)

الحلّ

حل آخر:

ل(س ≠ ٥) = ل(١) + ل(٢) + ل(٣) + ل(٤) + ل(٦)

الحلّ (تابع)

$$= \frac{١}{١٢} + \frac{٢}{١٢} + \frac{٣}{١٢} + \frac{٣}{١٢} + \frac{١}{١٢} = \frac{١٠}{١٢} = \frac{٥}{٦}$$

نجمع احتمالات كل (س) التي لا تساوي ٥

مثال ٤

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي لمتغيّر عشوائي متقطع (ر).

ر	٣	٤	٥	٦	٧
ل(ر)	٠,٤	أ	أ – ٠,١	٠,١٥	٠,٢١

أوجد:

أ) قيمة الثابت أ

ب) ل(٤ ≤ ر < ٦)

حل مثال ٤ (أ)

الحلّ

أ) ١ = ٠,٤ + أ + أ – ٠,١ + ٠,١٥ + ٠,٢١

١ = ٢أ + ٠,٦٦

٢أ = ٠,٣٤

أ = ٠,١٧

مجموع الاحتمالات في جدول التوزيع الاحتمالي يساوي ١،
أي ∑ ل(ر) = ١

حل مثال ٤ (ب)

الحلّ

ب) ل(٤ ≤ ر < ٦) = ل(٤) + ل(٥)

= أ + أ − ٠٫١ = ٢أ − ٠٫١

= ٢ × ٠٫١٧ − ٠٫١ = ٠٫٢٤

توجد قيمتان للمتغيّر (ر) في الفترة (٤ ≤ ر < ٦) هما ٤ ، ٥

مثال ٥

لدى ولد كيس فيه ٦ حبّات من الحلوى: ٣ حمراء، ٢ خضراء، وواحدة صفراء. يختار الولد عشوائيًا قطعتَي حلوى من الكيس من دون إرجاع. يمثل المتغيّر العشوائي المتقطع (خ) عدد قطع الحلوى الخضراء التي يختارها.

أ) اكتب القيم الممكنة للمتغيّر (خ).

ب) استخدم جدول التوزيع الاحتمالي الآتي للمتغيّر (خ) لإيجاد احتمال أن يختار قطعة حلوى خضراء واحدة على الأقل.

خ	٠	١	٢
ل(خ)	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{٨}{١٥}$	$\frac{١}{١٥}$

حل مثال ٥ (أ)

أ) خ ∈ {٠ ، ١ ، ٢}

يمكنه اختيار ٠ ، ١ ، ٢ من قطع الحلوى الخضراء.

الحلّ

ب) ل(على الأقل واحدة خضراء) = ل(١) + ل(٢)

$$= \frac{٨}{١٥} + \frac{١}{١٥}$$

$$= \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$$

واحد على الأقل يعني واحدًا أو أكثر من واحد

تمارين ٣-٢

١) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع (س).

س	١	٢	٣	٤
ل(س)	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,١

استخدم الجدول لإيجاد:

أ) ل(س > ٣)

ب) ل(س ≥ ٢)

ج) ل(س ≠ ٢)

د) ل(١ ≥ س < ٤)

هـ) ل(س > ٤)

٢) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع (ع).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ع	٠	١	٢	٣	٤	٥
ل(ع)	جـ	جـ + ٠٫١٢	٢جـ − ٠٫٠٨	٠٫٣٥	٠٫١٨	٣جـ + ٠٫٠١

أ) أوجد قيمة الثابت جـ.

ب) أوجد قيمة:

١) ل(ع ≤ ١)

٢) ل(١ < ع ≤ ٣)

ج) أوجد احتمال أن يكون (ع) عددًا فرديًا.

٣) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع (ص).

ص	٠	١	٢	٣	٤	٥
ل(ص)	١/٢٠	٣/٢٠	٥/٢٠	أ/٢٠	أ − ١/٢٠	١/٢٠

أ) بيّن أن أ = ١١/٢١

ب) أوجد احتمال أن يكون (ص) عددًا أوليًا.

٤) لدى شركة ١٥ آلية: ٦ شاحنات، ٥ حافلات، ٣ سيارات، ودراجة نارية واحدة. يتم اختيار آليتين عشوائيًا. يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع (و) عدد الحافلات المختارة.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

و	٠	١	٢
ل(و)	$\frac{٣}{٧}$	$\frac{١٠}{٢١}$	.....

أ) أكمل الجدول.

ب) أوجد احتمال أن يتم اختيار حافلة واحدة على الأكثر.

٣-٣ القيمة المتوقعة والتباين

قيم المتغير العشوائي المتقطع التي لها احتمالات أعلى يتوقع حدوثها أكثر من تلك التي قيم احتمالاتها أقل.

القيمة المتوقعة

نسمي الوسط الحسابي لمتغيّر عشوائي متقطع (س) **القيمة المتوقعة** (expectation) لهذا المتغيّر ونرمز إليها بـ ت(س).

قطعة نقدية غير منتظمة

رُميت قطعة نقدية غير منتظمة ٣ مرات، ويمثل (س) عدد مرات ظهور الصورة. يبيّن الجدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س).

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٢١٦	٠,٤٣٢	٠,٢٨٨	٠,٠٦٤

ماذا نتوقع؟

- نتوقع أن نحصل على صورة واحدة في ٤٣,٢٪ من المحاولات.
- نتوقع أن نحصل على صورتين في ٢٨,٨٪ من المحاولات.



• نتوقع أن نحصل على ٣ صور في ٦,٤٪ من المحاولات.

• نتوقع أن لا نحصل على أي صورة في ٢١,٦٪ من المحاولات.

ويكون هذا لأن الاحتمالات في الجدول هي التكرارات النسبية لقيم (س).

نحوّل الاحتمالات إلى نسب مئوية بضربها في ١٠٠٪:

٠,٢١٦ × ١٠٠% = ٢١,٦% ، ٠,٤٣٢ × ١٠٠% = ٤٣,٢%

التكرارات المتوقعة في ١٠٠٠ تجربة

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٢١٦	٠,٤٣٢	٠,٢٨٨	٠,٠٦٤
التكرار المتوقع (ك)	٢١٦	٤٣٢	٢٨٨	٦٤

التكرار المتوقع (ك) = ٠,٢١٦ × ١٠٠٠ = ٢١٦، وهكذا للقيم الأخرى.

الوسط من جدول التكرار

$$\text{ت(س)} = \frac{\Sigma\, \text{س ك}}{\Sigma\, \text{ك}}$$

$$= \frac{(٠ \times ٢١٦) + (١ \times ٤٣٢) + (٢ \times ٢٨٨) + (٣ \times ٦٤)}{٢١٦ + ٤٣٢ + ٢٨٨ + ٦٤}$$

$$= \frac{١٢٠٠}{١٠٠٠} = ١,٢$$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh



نتيجة ٢: القيمة المتوقعة

إذا قمنا الآن باستبدال التكرارات بالتكرارات النسبية (الاحتمالات) في الحسابات أعلاه، نحصل على القيمة نفسها لـ ت(س).

$$\text{الوسط} = \text{ت}(\text{س}) = \frac{\Sigma\ \text{س ل}(\text{س})}{\Sigma\ \text{ل}(\text{س})} = \Sigma\ \text{س} \times \text{ل}(\text{س})$$

$$= (٠ \times ٠,٢١٦) + (١ \times ٠,٤٣٢) + (٢ \times ٠,٢٨٨) + (٣ \times ٠,٠٦٤) = ١,٢$$

لاحظ أن $\Sigma\ \text{ل}(\text{س}) = ١$

نتيجة ٢

القيمة المتوقعة لمتغيّر عشوائي متقطع (س) هي

$$\text{ت}(\text{س}) = \Sigma\ \text{س ل}(\text{س})$$

التباين

يعطي **التباين** (variance) أو الانحراف المعياري لمتغيّر عشوائي متقطع قياسًا لانتشار القيم حول الوسط (التوقع ت(س)). يرمز إلى التباين بـ $\text{ع}^{٢}(\text{س})$ ويرمز إلى الانحراف المعياري بـ ع(س).

نذكّر أن الانحراف المعياري $= \sqrt{\text{التباين}}$ ،

أي أن $\text{ع}(\text{س}) = \sqrt{\text{ع}^{٢}(\text{س})}$

صيغة التباين

يمكننا أخذ صيغة التباين لتوزيع تكراري،

التباين = $\frac{\text{مج س}^{٢}\ \text{ك}}{\text{مج ك}} - \overline{\text{س}}^{٢}$، ونستبدل كلًا من ك بـ ل(س) ، $\overline{\text{س}}$ بـ ت(س) على الترتيب للحصول على صيغة لتباين متغير عشوائي متقطع (س).

$$\text{التباين} = \frac{\text{مج س}^{٢}\ \text{ل(س)}}{\text{مج ل(س)}} - (\text{ت(س)})^{٢}$$
$$= \text{مج س}^{٢}\ \text{ل(س)} - (\text{ت(س)})^{٢}$$

لاحظ مجددًا أن مج ل(س) = ١

نتيجة ٣

نتيجة ٣

تباين متغير عشوائي متقطع (س) هو

$$\text{ع}^{٢}\text{(س)} = \text{مج س}^{٢}\ \text{ل(س)} - (\text{ت(س)})^{٢}$$

الانحراف المعياري لمتغير عشوائي متقطع (س) هو

$$\text{ع(س)} = \sqrt{\text{ع}^{٢}\text{(س)}}$$

مثال ٦

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع (س).

س	٠	٥	١٥	٢٠
ل(س)	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$	$\frac{٥}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$

أ) أوجد ت(س).

ب) أوجد ع^{٢}(س).

ج) أوجد ع(س) مقرّبة إلى أقرب منزلتين عشريتين.

حل مثال ٦

س	٠	٥	١٥	٢٠	المجموع
ل(س)	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$	$\frac{٥}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$	١
س × ل(س)	٠	$\frac{١٥}{١٢}$	$\frac{٧٥}{١٢}$	$\frac{٦٠}{١٢}$	١٢,٥
س^{٢} × ل(س)	٠	$\frac{٧٥}{١٢}$	$\frac{١١٢٥}{١٢}$	$\frac{١٢٠٠}{١٢}$	٢٠٠

الحلّ

أ) ت(س) = Σ س ل(س) = ١٢,٥

الحلّ

ب) $ع^{٢}(س) = \sum س^{٢} ل(س) - (ت(س))^{٢}$

$= ٢٠٠ - (١٢,٥)^{٢} = ٤٣,٧٥$

تذكّر أن تطرح تربيع ت(س) عند حساب التباين.

الحلّ

ج) $ع(س) = \sqrt{ع^{٢}(س)} = \sqrt{٤٣,٧٥} = ٦,٦١$

نأخذ الجذر التربيعي للتباين.

مثال ٧

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع (ص).

ص	١	٤	أ	١٢
ل(ص)	٠,٣	٠,٤	٠,٢	٠,١

لدينا ت(ص) = ٥,١ ، أوجد:

أ) قيمة الثابت أ

ب) $ع^{٢}(ص)$

الحلّ

أ) ت(ص) = (١ × ٠,٣) + (٤ × ٠,٤) + (أ × ٠,٢) + (١٢ × ٠,١)

٥,١ = ٣,١ + أ(٠,٢)

$$\text{أ} = \frac{٥,١ - ٣,١}{٠,٢}$$

أ = ١٠

بتعويض القيم من الجدول في صيغة ت(ص) حيث ت(ص) تساوي ٥,١

الحلّ

ب) ع^{٢}(ص) = (١^{٢} × ٠,٣) + (٤^{٢} × ٠,٤)
+ (١٠^{٢} × ٠,٢) + (١٢^{٢} × ٠,١) − (٥,١)^{٢}

= ٤١,١ − ٢٦,٠١ = ١٥,٠٩

بالتعويض في صيغة ع^{٢}(ص)

تمارين ٣-٣

١) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع (س).

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,١٠	٠,١٢	٠,٣٦	٠,٤٢

أ) أوجد ت(س).

ب) أوجد ع^{٢}(س).

٢) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع (ص).

ص	٠	١	٢	٣	٤
ل(ص)	٠,٠٣	٢ل	٠,٣٢	ل	٠,٠٥

أ) أوجد قيمة الثابت ل.

ب) أوجد قيمة ت(ص).

ج) أوجد قيمة ع^{٢}(ص).

د) اكتب قيمة ع(ص) مقرّبة إلى أقرب ٣ منازل عشرية.

٣) لدينا المتغيّر العشوائي المتقطع (ج) بحيث ج ∈ {١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠}. إذا كان لقيم (ج) الأربع الممكنة احتمالات متساوية، فأوجد:

أ) ت(ج).

ب) ع^{٢}(ج).

٤) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي لمتغيّر عشوائي متقطع (و).

و	١	٣	٩	م
ل(و)	٠,٤	٠,٢٨	٠,١٤	٠,١٨

إذا كان لدينا ت(و) = ٥,٣٨ ، فأوجد: أ) قيمة م ب) قيمة ع^{٢}(و)

٥) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي لمتغيّر عشوائي متقطع (غ).

غ	٢	٧	ب	٢٤
ل(غ)	٠,٣	٠,٣	٠,١	٠,٣

لدينا ت(غ) = ب ، أ) أوجد قيمة ب ب) أوجد قيمة ع^{٢}(غ)

٦) لدينا المتغيّر العشوائي المتقطع (ر) بحيث

ر ∈ {١٠ ، ٢٠ ، ٧٠ ، ١٠٠}. لدينا ل(ر) = $\frac{ر}{٢٠٠}$

أ) بيّن أن ت(ر) = ٧٧

ب) أوجد ع^{٢}(ر)

٧) يبيّن الجدول الآتي الأرباح المحتملة لمشروع تجاري مع احتمالاتها.

الربح (ريال عُماني)	-١٠٠٠٠	٠	١٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٣٠٠٠٠
الاحتمال	٠,٢٤	٠,٣٣	٠,٢٨	٠,١١	٠,٠٤

أ) أوجد القيمة المتوقعة للأرباح من هذا المشروع التجاري.

ب) أوجد التباين للأرباح.

٨) تمّت إدارة مربع دوّار منتظم محدد بالأرقام ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ مرّتَين. وتمّ جمع الناتجَين معًا ليعطيا المجموع الكلي (ت).

أ) أكمل مخطط الاحتمال الآتي مبيّنًا النواتج الـ ١٦ الممكنة ذات الاحتمالات المتساوية.

+	٢	٣	٥	٦
٢				
٣				
٥				
٦				

الدورة الأولى في الأعلى، والدورة الثانية على الجانب. (الشكل في كتاب الطالب صفحة ٨٧)

ب) استخدم مخطط الاحتمال المستخدم في الجزئية أ لتكمل جدول التوزيع الاحتمالي الآتي للمتغيّر (ت)، علمًا أن الاحتمالين الناقصين متساويان.

ت	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ل(ت)	١/١٦	٢/١٦	١/١٦	.....	٤/١٦	.....	١/١٦	٢/١٦	١/١٦

ج) إذا تم تكرار التجربة (إدارة المربع الدوار مرتين) لـ ١٠٠٠ مرة، فكم مرة تتوقع أن يكون المجموع:

١) مساويًا لـ ٨؟

٢) أكبر من ١٠؟

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- يأخذ المتغير المتقطع قيمًا محددة وقابلة للعد.

المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة)

• التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع هو عرض لكل قيمة من قيم المتغير واحتمالها.

• بالنسبة إلى المتغيّر العشوائي المتقطع (س):

$$0 \leq ل(س) \leq 1$$
$$\sum ل(س) = 1$$
$$ت(س) = \sum س \times ل(س)$$
$$ع^{2}(س) = \sum س^{2} \times ل(س) - (ت(س))^{2}$$
$$ع(س) = \sqrt{ع^{2}(س)}$$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

١) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع (س).

س	١	٢	٣	٤
ل(س)	١ – ك	٢ – ٣ك	٣ – ٤ك	٤ – ٦ك

أ) أوجد قيمة ك

ب) أوجد القيمة الدقيقة لـ ت(س).

مساعدة: «الدقيقة» تعني إيجاد الناتج بدون تقريب، في صورة أ/ب.

٢) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع (أ).

أ	٠	١	٢	٣	٤
ل(أ)	٠,٠٤	٠,٠٨	٠,٤	٠,٣٦	٠,١٢

أ) أوجد القيمة المتوقعة.

ب) أوجد ع^{٢}(أ).

٣) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع الربح (أ)٪ لاستثمار.

الربح (أ)٪	١	٥	١٠	١٥	٢٠	٣٠	٤٠	٤٥	٥٠
الاحتمال	٠,٠٥	٠,١٠	٠,٥٠	٠,٢٠	٠,٠٥	٠,٠٤	٠,٠٣	٠,٠٢	٠,٠١

أوجد القيمة المتوقعة للأرباح على استثمار ٥٠٠٠٠ ريال عُماني.

مساعدة: قيمة الأرباح المتوقعة لاستثمار (م) ريال عماني = القيمة المتوقعة بالنسبة المئوية × المبلغ المستثمر (م).

٤) لمثلّث دوّار منتظم أطراف محددة بالأرقام ٠ ، ١ ، ٢ ولمثلّث دوّار منتظم آخر أطراف محددة بالأرقام ١- ، ٠ ، ١. تمّت إدارة الاثنَين مرة واحدة وتمّ تسجيل النتيجة (س)، وهي مجموع تربيع الرقمَين الناتجَين.

أ) أوجد قيمة الثابت أ المستخدمة في جدول التوزيع الاحتمالي الآتي لقيم المتغيّر (س).

س	٠	١	٢	٤	٥
ل(س)	١/٩	٣/٩	أ/٩	١/٩	أ/٩

ب) أوجد القيمة الدقيقة لـ ع^{٢}(س).

٥) تحوي حزمة من خمسة أقراص فيديو ٣ أفلام ووثائقيَين. تمّ اختيار ٣ أقراص عشوائيًا من هذه الحزمة. يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (م) عدد الأفلام المختارة.

م	١	٢	٣
ل(م)	٠,٣	٠,٦	٠,١

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (د) عدد الوثائقيات المختارة.

د	٠	١	٢
ل(د)	٠,١	٠,٦	٠,٣

أ) أعطِ سببًا لوجوب أن يكون مجموع ت(م) ، ت(د) مساويًا لـ ٣

ب) احسب: ١) ع^{٢}(م) ٢) ع^{٢}(د)

ج) اكتب ما تلاحظه عن تباين هذين المتغيّرين.

ورقة الإجابات النموذجية ٣-١

١) أ) ١) ١٤ ٢) ٦ ب) س ∈ {٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤} ج) ١٠ (يظهر ٤ مرات من ١٦: ٣+٧ ، ٧+٣ ، ٤+٦ ، ٦+٤)

٢) أ) ج ∈ {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ب) ١) ٤ قيم (٠ ، ١ ، ٢ ، ٣) ٢) ٣ قيم (٠ ، ١ ، ٢)

٣) أ) خ ∈ {٠ ، ١ ، ٢} ب) خ′ = ٤ − خ ، إذًا خ′ ∈ {٢ ، ٣ ، ٤}

٤) ن = ٦ (أقل عدد للبقر ٢ فإن ن − ٤ = ٢ ، وأقل عدد للعنزات ١ فإن ن − ٥ = ١)

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ورقة الإجابات النموذجية ٣-١ (تابع)

٥) (قرأت أرقام المقاطع الثمانية من الشكل: ١ ، ١ ، ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٣ ، ٣)

أ) ١) س > ص: النواتج (٣ ، ٣ ، ٢) فإن س = ٨ ، ص = ١٨

٢) س = ص: النواتج (١ ، ٢ ، ٣) فإن س = ٦ ، ص = ٦

٣) س < ص: النواتج (١ ، ١ ، ٢) فإن س = ٤ ، ص = ٢

ب) ١) أكبر ص = ٣ × ٣ × ٣ = ٢٧ ، وأصغر س = ١ + ١ + ١ = ٣ ، الفرق = ٢٤

٢) أكبر س = ٣ + ٣ + ٣ = ٩ ، وأصغر ص = ١ × ١ × ١ = ١ ، الفرق = ٨

٦) أ) و ∈ {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

ب) بعد صعود المرأة وابنتها يبقى مقعدان فقط، يُختار شاغلاهما من ٧ أشخاص: ١) م ∈ {٠ ، ١} (تقل القيم الممكنة) ٢) ج ∈ {٠ ، ١ ، ٢}

٧) أ) الطول قيمة مستمرة يمكن أن تأخذ أي قيمة ضمن مجال، فلا يمكن عدّ قيمه. ب) عدد الزوار لا يحدث بشكل عشوائي ضمن مجال محدد من القيم، وليس له حدّ أعلى معيّن.

بنود الشرح (٦ ب) و(٧) إجابات مقترحة من حسابي.

ورقة الإجابات النموذجية ٣-٢

١) أ) ل(س < ٣) = ل(٤) = ٠٫١ ب) ل(س ≥ ٢) = ٠٫٢ + ٠٫٣ = ٠٫٥ ج) ل(س ≠ ٢) = ١ − ٠٫٣ = ٠٫٧ د)

ل(١ ≥ س < ٤) = ٠٫٢ + ٠٫٣ + ٠٫٤ = ٠٫٩ هـ) ل(س > ٤) = ٠

٢) أ) ٧جـ + ٠٫٥٨ = ١ ، جـ = ٠٫٠٦ (الاحتمالات: ٠٫٠٦ ، ٠٫١٨ ، ٠٫٠٤ ، ٠٫٣٥ ، ٠٫١٨ ، ٠٫١٩)

ب) ١) ل(ع ≤ ١) = ١ − ٠٫٠٦ = ٠٫٩٤ ٢) ل(١ < ع ≤ ٣) = ٠٫٠٤ + ٠٫٣٥ = ٠٫٣٩ ج) ل(ع فردي) = ٠٫١٨ + ٠٫٣٥ + ٠٫١٩ = ٠٫٧٢

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ورقة الإجابات النموذجية ٣-٢ (تابع)

٣) أ) $\frac{١}{٢٠} + \frac{٣}{٢٠} + \frac{٥}{٢٠} + \frac{أ}{٢٠} + (أ - \frac{١}{٢٠}) + \frac{١}{٢٠} = ١$ ،

$\frac{٩}{٢٠} + \frac{أ}{٢٠} + أ = ١$ ، $\frac{٢١أ}{٢٠} = \frac{١١}{٢٠}$ ، $أ = \frac{١١}{٢١}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ب) الأولية: ٢ ، ٣ ، ٥

$$\text{ل} = \frac{٥}{٢٠} + \frac{\text{أ}}{٢٠} + \frac{١}{٢٠} = \frac{٦}{٢٠} + \frac{١١}{٤٢٠} = \frac{١٢٦ + ١١}{٤٢٠} = \frac{١٣٧}{٤٢٠}$$

٤) أ) $\text{ل}(٢) = \frac{٢١}{٢١} - \frac{٩}{٢١} - \frac{١٠}{٢١} = \frac{٢}{٢١}$ ب)

$$\text{ل}(\text{و} \geq ١) = \frac{٣}{٧} + \frac{١٠}{٢١} = \frac{١٩}{٢١}$$

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ورقة الإجابات النموذجية ٣-٣ (١، ٢)

١) أ) ت(س) = ٠ + ٠,١٢ + ٠,٧٢ + ١,٢٦ = ٢,١ ب)

Σ س^{٢} ل(س) = ٠,١٢ + ١,٤٤ + ٣,٧٨ = ٥,٣٤ ،

ع^{٢}(س) = ٥,٣٤ − ٤,٤١ = ٠,٩٣

٢) أ) ٠,٠٣ + ٢ل + ٠,٣٢ + ل + ٠,٠٥ = ١ ، ٣ل = ٠,٦ ، ل = ٠,٢

الاحتمالات: ٠,٠٣ ، ٠,٤ ، ٠,٣٢ ، ٠,٢ ، ٠,٠٥

ب) ت(ص) = ٠ + ٠,٤ + ٠,٦٤ + ٠,٦ + ٠,٢ = ١,٨٤

ج) Σ ص^{٢} ل(ص) = ٠,٤ + ١,٢٨ + ١,٨ + ٠,٨ = ٤,٢٨ ،

ع^{٢}(ص) = ٤,٢٨ − ٣,٣٨٥٦ = ٠,٨٩٤٤

د) ع(ص) = $\sqrt{٠,٨٩٤٤}$ ≈ ٠,٩٤٦

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ورقة الإجابات النموذجية ٣-٣ (٣، ٤)

٣) ل = $\frac{١}{٤}$ لكل قيمة. أ) ت(ج) = $\frac{١ + ٣ + ٦ + ١٠}{٤}$ = ٥ ب)

ع^{٢}(ج) = ٣٦,٥ − ٢٥ = ١١,٥ ، $\frac{١ + ٩ + ٣٦ + ١٠٠}{٤}$ = ٣٦,٥ ، ∑ ج^{٢} ل =

٤) أ) ٠,٤ + ٠,٨٤ + ١,٢٦ + ٢,٥٢ = ٥,٣٨ ، م = ٢,٨٨ ، م = ٠,١٨م + ١,٢٦ + ٠,٨٤ + ٠,٤ = ١

ب) ∑ و^{٢} ل(و) = ٠,٤ + ٢,٥٢ + ١١,٣٤ + ٤٦,٠٨ = ٦٠,٣٤ ،

ع^{٢}(و) = ٦٠,٣٤ − ٢٨,٩٤٤٤ = ٣١,٣٩٥٦

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ورقة الإجابات النموذجية ٣-٣ (٥، ٦)

٥) أ) ب = ٠,٦ + ٢,١ + ٠,١ب + ٧,٢ ، ٠,٩ب = ٩,٩ ، ب = ١١

ب) ∑ غ^{٢} ل = ١,٢ + ١٤,٧ + ١٢,١ + ١٧٢,٨ = ٢٠٠,٨ ،

ع^{٢}(غ) = ٢٠٠,٨ − (١١)^{٢} = ٧٩,٨

٦) أ)

ت(ل) = ١٠ × ٠,٠٥ + ٢٠ × ٠,١ + ٧٠ × ٠,٣٥ + ١٠٠ × ٠,٥ = ٠,٥ + ٢ + ٥

ب) ∑ ر^{٢} ل = ٦٧٦٠ ، ع^{٢}(ل) = ٦٧٦٠ − ٥٩٢٩ = ٨٣١

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات النموذجية ٣-٣ (٧، ٨)

٧) أ) ت = −٢٤٠٠ + ٠ + ٢٨٠٠ + ٢٢٠٠ + ١٢٠٠ = ٣٨٠٠ ريال عُماني

ب)

$\Sigma س^{٢}$ ل = ٢٤٠٠٠٠٠٠ + ٠ + ٢٨٠٠٠٠٠٠ + ٤٤٠٠٠٠٠٠ + ٣٦٠٠٠٠٠٠ = ١٣٢٠٠٠٠٠٠

، التباين = ١٣٢٠٠٠٠٠٠ − (٣٨٠٠)^{٢} = ١١٧٥٦٠٠٠٠

٨) أ) المجاميع: الصف الأول (٢): ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨ (٣): ٥ ، ٦ ، ٨ ، ٩

(٥): ٧ ، ٨ ، ١٠ ، ١١ (٦): ٨ ، ٩ ، ١١ ، ١٢

ب) ل(٧) = ل(٩) = $\frac{٢}{١٦}$ (الاحتمالان الناقصان متساويان

ومجموعهما $\frac{٤}{١٦}$)

ج) ١) $\frac{٤}{١٦}$ × ١٠٠٠ = ٢٥٠ مرة ٢) ل(ت > ١٠) = ل(١١) + ل(١٢) = $\frac{٣}{١٦}$ ،

$\frac{٣}{١٦}$ × ١٠٠٠ = ١٨٧٫٥ ≈ ١٨٨ مرة

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ورقة الإجابات النموذجية للمراجعة

١) أ) (١ − ك) + (٢ − ٣ك) + (٣ − ٤ك) + (٤ − ٦ك) = ١ ،

١٠ − ١٤ك = ١ ، ك = $\frac{٩}{١٤}$ (الاحتمالات: $\frac{٥}{١٤}$ ، $\frac{١}{١٤}$ ، $\frac{٦}{١٤}$ ، $\frac{٢}{١٤}$)

ب) ت(س) = $\frac{٥ + ٢ + ١٨ + ٨}{١٤} = \frac{٣٣}{١٤}$

٢) أ) ت(أ) = ٠ + ٠,٠٨ + ٠,٨ + ١,٠٨ + ٠,٤٨ = ٢,٤٤ ب)

ع^{٢}(أ) = ٦,٨٤ − ٥,٩٥٣٦ = ٠,٨٨٦٤

٣) ت(أ) = ١٣,٣٥ % ، الأرباح المتوقعة = ١٣,٣٥% × ٥٠٠٠٠ = ٦٦٧٥ ريال عُماني

٤) أ) مجموع الاحتمالات: $\frac{١ + ٣ + أ + ١ + أ}{٩}$ = ١ ، ٥ + ٢أ = ٩ ،

أ = ٢ (قيم (س) الممكنة: ٠ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ باحتمالات $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{٣}{٩}$ ، $\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{٢}{٩}$)

ب) ت(س) = $\frac{٠ + ٣ + ٤ + ٤ + ١٠}{٩} = \frac{٢١}{٩} = \frac{٧}{٣}$ ،

ع س^{٢} ل = $\frac{٠ + ٣ + ٨ + ١٦ + ٥٠}{٩} = \frac{٧٧}{٩}$ ،

ع^{٢}(س) = $\frac{٧٧}{٩} - \frac{٤٩}{٩} = \frac{٢٨}{٩}$

٥) أ) ت(م) = ٠,٣ + ١,٢ + ٠,٣ = ١,٨ ، ت(د) = ٠ + ٠,٦ + ٠,٦ = ١,٢ ، المجموع = ٣ لأن عدد الأفلام + عدد الوثائقيات = ٣ دائمًا (عدد الأقراص المختارة).

ب) ١) ع^{٢}(م) = ٣,٦ − ٣,٢٤ = ٠,٣٦ ٢) ع^{٢}(د) = ١,٨ − ١,٤٤ = ٠,٣٦

ج) التباينان متساويان، لأن (د) = ٣ − (م) وانتشار القيم حول الوسط لا يتغير.

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh