٢-١ تعريف الدالّة

العلاقة هي ارتباط بين عناصر مجموعة ما بعناصر مجموعة أخرى.

الدالّة هي علاقة بين عناصر مجموعتين ، حيث ترتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد وواحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.

أي دالّة تمثل علاقة ، ولكن ليست كل علاقة تمثل دالّة.

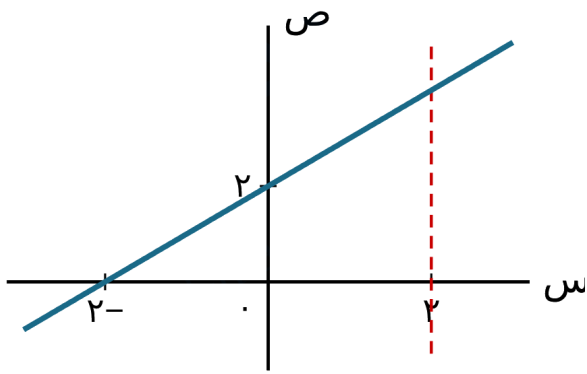
قد تكون الدالّة **واحدًا إلى واحد** one-one أو **متعدّدًا إلى واحد** many-one (ليست واحدًا إلى متعدّد).

من الدلائل على إثبات أن منحنى ما يمثّل دالّة هو رسم مستقيم رأسي عليه. فإذا لم يقطع المستقيم الرأسي المنحنى في أكثر من نقطة ، فإنه سيكون دالّة.

مساعدة: إذا رسمنا كل المستقيمات الرأسية الممكنة على منحنى العلاقة ، فستكون العلاقة: • **دالّة** : إذا قطع كل مستقيم المنحنى في نقطة واحدة فقط. • **غير دالّة** : إذا قطع مستقيم واحد المنحنى في أكثر من نقطة.

الدالّة واحد إلى واحد

تُعدّ الدالّة س ← س + ٢ أو (الدالّة د(س) حيث يرتبط س بـ س + ٢) حيث س ∋ ع مثالًا على الدالّة واحد إلى واحد.



المدخلة هي: العدد الذي يوضع في الدالّة (أي إذا كانت الدالّة د(س) ، فإن المدخلة هي س). **المخرجة** هي: العدد الناتج من تعويض المدخلة في الدالّة (أي د(س)).

نجد في الدالّة واحد إلى واحد مخرجة واحدة لكلّ مدخلة ، وبالمثل فإن لكلّ مخرجة واحدة نرى مدخلة واحدة فقط مرتبطة بها.

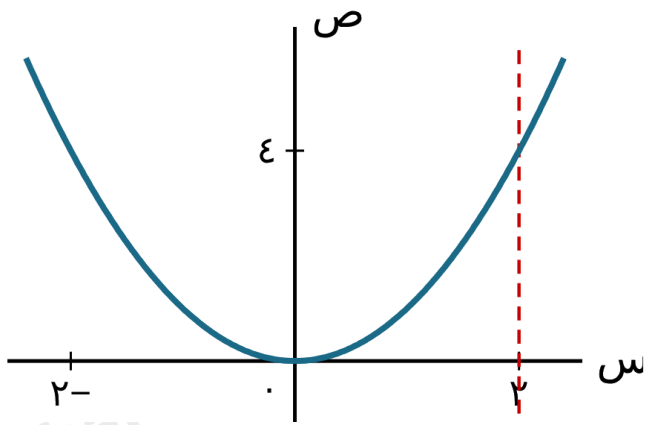
يمكن أن نكتب هذه الدالّة في صورة د: س ← س + ٢ حيث س ∈ ع أو في صورة د(س) = س + ٢ حيث س ∈ ع. تُقرأ د: س ← س + ٢ "الدالّة د حيث يرتبط س بـ س + ٢" ، أو على النحو "الدالّة د(س) تربط س بـ س + ٢".

د(س) هي قيمة مخرجة للدالّة د عندما تكون قيمة المدخلة س ، فمثلًا إذا كانت د(س) = س + ٢ ، وكانت المدخلة س = ٥ ، فإن د(٥) تمثّل قيمة المخرجة للدالّة د(س).

مساعدة: ارسم منحنى الدالّة. إذا قطع مستقيم أفقي المنحنى في أكثر من نقطة فإنها دالّة متعدد إلى واحد ، وإن لم يكن كذلك فإنها دالّة واحد إلى واحد.

الدالّة متعدّد إلى واحد

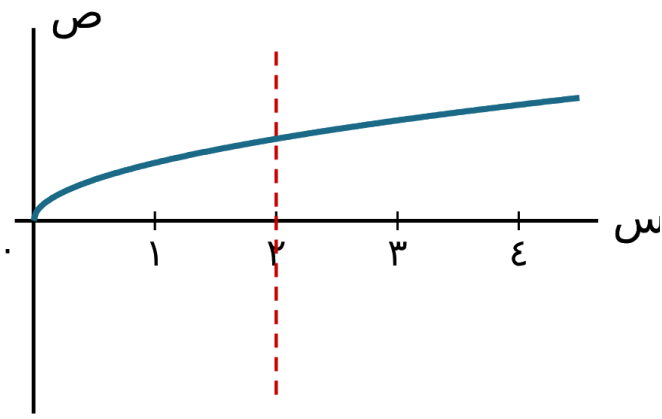
الدالّة س ← س^{٢} حيث س ∈ ع هي دالّة متعدّدة إلى واحد:



في دالّة متعدّد إلى واحد: يوجد لكل مدخلة مخرجة واحدة ، ولكن يمكن أن يكون لكل مخرجة أكثر من مدخلة. يمكننا أن نكتب هذه الدالّة في صورة د: س ← س^{٢} حيث س ∈ ع أو د(س) = س^{٢} ، وتُقرأ د: س ← س^{٢} على النحو "الدالّة د(س) تربط س بـ س^{٢}".

العلاقة واحد إلى متعدّد

إذا نظرنا إلى منحنى ص^{٢} = س:



يمكن أن نلاحظ أن لقيمة المدخلة س قيمتَين مخرجتَين ، الأمر الذي يعني أن هذه العلاقة ليست بدالّة (علاقة واحد إلى متعدّد) ، بل إنها مجرّد علاقة.

تُسمّى مجموعة قيم المدخلات في الدالّة **مجال الدالّة** domain. عند تعريف الدالّة ، من المهمّ أن نحدّد مجالها. على سبيل المثال ، مجال الدالّة د(س) = س^{٢} لكل قيم س ∋ ع هو ع مجموعة الأعداد الحقيقية.

وتُسمّى مجموعة قيم المخرجات في الدالّة **مدى الدالّة** range. يمكن إيجاد المدى بالنظر إلى منحنى الدالّة في مجالها ، مثلًا للدالّة د(س) = س^{٢} ، حيث س ∋ ع ، المخرجات أو المدى تكون دائمًا أكبر من أو تساوي ٠ لأن س^{٢} عدد غير سالب.

نتيجة ١

الدالّة الخطية تكون دائمًا واحدًا إلى واحد ، والدالّة التربيعية تكون دائمًا متعدّدًا إلى واحد إذا كان مجالها ع.

مثال ١

إذا علمت أن الدالّة د(س) معرفة كالآتي:
د(س) = (س - ٣)^{٢} + ٨ ، حيث ١- ≤ س ≤ ٩ ، فارسم منحنى الدالّة ، وحدّد مجالها ومداها.

الحلّ

د(س) = (س - ٣)^{٢} + ٨ دالّة تربيعية.

∴ معامل س^{٢} موجب ، ∴ سيكون المنحنى مفتوحًا إلى الأعلى (له قيمة صغرى).

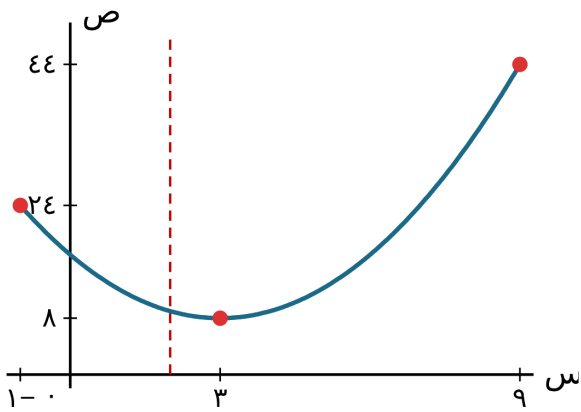
الجزء (س - ٣)^{٢} مربّع كامل ، لذا فإنه ≥ ٠ دائمًا ، وعليه فإن أصغر قيمة يمكن أن يصل إليها هي الصفر ، ويحصل ذلك عندما س = ٣.

القيمة الصغرى للعبارة هي ٠ + ٨ = ٨ ، ويحصل ذلك عندما س = ٣

لذا تكون للدالّة د(س) = (س - ٣)^{٢} + ٨ قيمة صغرى عند النقطة (٣ ، ٨).

عندما س = ١- ، فإن ص = (١- - ٣)^{٢} + ٨ = ٢٤

عندما س = ٩ ، فإن ص = (٩ - ٣)^{٢} + ٨ = ٤٤



المجال هو: ١- ≤ س ≤ ٩ المدى هو: ٨ ≤ د(س) ≤ ٤٤

تمارين ٢-١

١) أيٌّ من العلاقات الآتية تمثّل دالّة؟ ثمّ حدّد ما إذا كانت العلاقة واحدًا إلى واحد أو متعدّدًا إلى واحد:

أ) ص = ٢س - ٣ ، س ∈ ع ب) ص = س^{٢} - ٣ ، س ∈ ع

ج) ص = ٢س^{٢} - ١ ، س ∈ ع د) ص = ٣س^{٢} + ٤ ، س ∈ ع ، س ≤ ٠

٢) استخدم برمجيات التمثيلات البيانية لتحديد أيّ من العلاقات الآتية تمثل دوالّ ، وحدد ما إذا كانت هذه الدوالّ واحدًا إلى واحد أو متعدّدًا إلى واحد:

أ) ص = ٢^{س} ، س ∈ ع ب) ص = $\frac{١٠}{س}$ ، س ∈ ع ، س > ٠

ج) ص = $\sqrt{س}$ ، س ∈ ع ، س ≤ ٠ د) ص^{٢} = ٤س ، س ∈ ع

٣) أ) مثّل العلاقة الآتية بيانيًّا:
ص = { ٩ - س^{٢} ، حيث س ∈ ع ، ٣- ≤ س ≤ ٢ ؛ ٢س + ١ ، حيث ب
ب) حدّد نوع العلاقة (واحد إلى واحد ، أو متعدّد إلى واحد ، أو واحد إلى متعدّد).

٤) أ) مثّل العلاقة الآتية بيانيًّا:
ص = { س^{٢} + ١ ، حيث ٠ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٢س - ٣ ، حيث ٢ ≤ س ≤ ٤ }
ب) وضّح أنّ هذه العلاقة ليست دالّة.

٥) حدّد المجال والمدى لكل دالّة من الدالّتين الممثَّلتين بالمنحنيَين الآتيَين:

أ) د(س) = ٧ + ٢س - س^{٢} ، منحنى يبدأ من النقطة (١- ، ٤) ، وله نقطة عظمى (١ ، ٨) ، وينتهي عند النقطة (٥ ، ٨-).

ب) د(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س ، منحنى يبدأ من النقطة (٣- ، ٩) ، ويمرّ بالنقطتَين (٢- ، ٢٠) و (١ ، ٧-) ، وينتهي عند النقطة (٢ ، ٤).

٦) أوجد مدى كلّ دالّة من الدوالّ الآتية:

أ) د(س) = س + ٤ ، حيث س < ٨ ب) د(س) = ٢س - ٧ ، حيث ٣- ≤ س ≤ ٢ ج) د(س) = ٧ - ٢س ، حيث ١- ≤ س ≤ ٤

د) د: س ← ٢س^{٢} ، حيث ١ ≤ س ≤ ٤ هـ) د(س) = ٢^{س} ، حيث ٥- ≤ س ≤ ٤ و) د(س) = $\frac{١٢}{س}$ ، حيث ١ ≤ س ≤ ٨

٧) أوجد مدى كلّ دالّة من الدوالّ الآتية:

أ) د(س) = س^{٢} - ٢ ، حيث س ∈ ع ب) د: س ← س^{٢} + ٣ ، حيث ٢- ≤ س ≤ ٥ ج) د(س) = ٣ - ٢س^{٢} ، حيث س ≤ ٢ د) د(س) = ٧ - ٣س^{٢} ، حيث ١- ≤ س ≤ ٢

٨) أوجد مدى كلّ دالّة من الدوالّ الآتية:

أ) د(س) = (س - ٢)^{٢} + ٥ ، حيث س ≤ ٢ ب) د(س) = (٢س - ١)^{٢} - ٧ ، حيث س ≤ $\frac{١}{٢}$ ج) د: س ← ٨ - (س - ٥)^{٢} ، حيث ٤ ≤ س ≤ ١٠ د) د(س) = ١ + $\sqrt{\text{(س - ٤)}}$ ، حيث س ≤ ٤

٩) اكتب كلّ دالّة من الدوالّ الآتية في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ ، حيث أ ، ب ، جـ ثوابت ، ثمّ حدّد مدى كلّ منها:

أ) د(س) = س^{٢} + ٦س - ١١ ، حيث س ∈ ع ب) د(س) = ٣س^{٢} - ١٠س + ٢ ، حيث س ∈ ع

١٠) اكتب كلّ دالّة من الدوالّ الآتية في صورة أ - ب(س + جـ)^{٢} ، حيث أ ، ب ، جـ ثوابت ، ثمّ حدّد مدى كلّ منها:

أ) د(س) = ٧ - ٨س - س^{٢} ، حيث س ∈ ع ب) د(س) = ٢ - ٦س - ٣س^{٢} ، حيث س ∈ ع

١١) أ) مثّل الدالّة بيانيًّا:

د(س) = { ٣ - س^{٢} ، حيث ٠ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٣س - ٧ ، حيث ٢ ≤ س ≤ ٥

ب) أوجد مدى الدالّة.

١٢) إذا علمت أن الدالّة د: س ← س^{٢} + ٦س + ك معرّفة على س ∈ ع ، حيث ك ثابت. فأوجد مدى الدالّة بدلالة ك.

khaled-math.surge.sh

١٣) إذا علمت أن الدالّة هـ: س ← ٥ - أس + ٢س^{٢} معرّفة على س ∈ ع ، حيث أ ثابت. فأوجد مدى الدالّة بدلالة أ.

١٤) إذا كانت د(س) = س^{٢} - ٢س - ٣ حيث س ∈ ع ، -أ ≤ س ≤ أ ، فأوجد قيمة أ إذا كان مدى الدالّة هو ٤- ≤ د(س) ≤ ٥

١٥) إذا كانت د(س) = س^{٢} + س - ٤ حيث س ∈ ع ، أ ≤ س ≤ أ + ٣ ، فأوجد قيم أ الممكنة إذا كان مدى الدالّة هو ٢- ≤ د(س) ≤ ١٦

١٦) إذا كانت د(س) = ٢س^{٢} - ٨س + ٥ حيث س ∈ ع ، ٠ ≤ س ≤ ك : أ) اكتب د(س) في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ. ب) حدّد قيمة ك عندما يكون لمنحنى الدالّة ص = د(س) محور تماثل. ج) أوجد مدى الدالّة ، مستخدمًا قيمة ك التي حصلت عليها في الجزئية (ب).

ورقة الإجابات النموذجية: تمارين ٢-١

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) أ) دالّة ، واحد إلى واحد ب) دالّة ، متعدّد إلى واحد ج) دالّة ، متعدّد إلى واحد د) دالّة ، واحد إلى واحد (لأن س ≤ ٠)

٢) أ) دالّة ، واحد إلى واحد ب) دالّة ، واحد إلى واحد ج) دالّة ، واحد إلى واحد د) ليست دالّة (لكل س > ٠ قيمتان لـ ص هما ±√(٤س)) ، علاقة واحد إلى متعدّد

٣) أ) الجزء الأول قطع مكافئ مفتوح للأسفل من (٣- ، ٠) إلى (٠ ، ٩) إلى (٢ ، ٥) ، والجزء الثاني مستقيم من (٢ ، ٥) إلى (٤ ، ٩). ب) دالّة (لكل س قيمة واحدة لـ ص ، وعند س = ٢ تكون ص = ٥ في الجزأين) ، وهي متعدّد إلى واحد ، لأن ص = ٥ عند س = ٢- وعند س = ٢.

٤) أ) الجزء الأول منحنى من (٠ ، ١) إلى (٢ ، ٥) ، والجزء الثاني مستقيم من (٢ ، ١) إلى (٤ ، ٥). ب) عند س = ٢ توجد قيمتان لـ ص هما ٥ و ١ ، أي مدخلة واحدة ولها مخرجتان ، فالعلاقة ليست دالّة.

٥) أ) المجال ١- ≤ س ≤ ٥ ، المدى ٨- ≤ د(س) ≤ ٨ ب) المجال ٣- ≤ س ≤ ٢ ، المدى ٧- ≤ د(س) ≤ ٢٠

٦) أ) د(س) < ١٢ ب) ١٣- ≤ د(س) ≤ ٣- ج) ١- ≤ د(س) ≤ ٩ د) ٢ ≤ د(س) ≤ ٣٢ هـ) $\frac{١}{٣٢} \le$ د(س) ≤ ١٦ و) $\frac{٣}{٢} \le$ د(س) ≤ ١٢

٧) أ) د(س) ≤ ٢- ب) ٣ ≤ د(س) ≤ ٢٨ ج) د(س) ≥ ٥- د) ٥- ≤ د(س) ≤ ٧

٨) أ) د(س) ≤ ٥ ب) د(س) ≤ ٧- ج) ١٧- ≤ د(س) ≤ ٨ د) د(س) ≤ ١

٩) أ) د(س) = (س + ٣)^{٢} - ٢٠ ، المدى د(س) ≤ ٢٠- ب) د(س) = ٣(س - $\frac{٥}{٣}$)^{٢} - $\frac{١٩}{٣}$ ، المدى د(س) ≤ - $\frac{١٩}{٣}$

١٠) أ) د(س) = ٢٣ - (س + ٤)^{٢} ، المدى د(س) ≥ ٢٣ ب) د(س) = ٥ - ٣(س + ١)^{٢} ، المدى د(س) ≥ ٥

١١) أ) الجزء الأول قطع مكافئ من (٠ ، ٣) إلى (٢ ، ١-) ، والجزء الثاني مستقيم من (٢ ، ١-) إلى (٤ ، ٥). ب) المدى ١- ≤ د(س) ≤ ٥

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

١٢) د(س) = (س + ٣)^{٢} + ك - ٩ ، فالمدى د(س) ≤ ك - ٩

١٣) هـ(س) = ٢(س - $\frac{أ}{٤}$)^{٢} + ٥ - $\frac{أ^{٢}}{٨}$ ، فالمدى

هـ(س) ≤ ٥ - $\frac{أ^{٢}}{٨}$

١٤) د(س) = (س - ١)^{٢} - ٤ ، لكي تكون القيمة الصغرى ٤- يجب أن يقع ١ في المجال.

القيمة العظمى هي د(-أ) = أ^{٢} + ٢أ - ٣ ، أ^{٢} + ٢أ - ٣ = ٥ ،

أ^{٢} + ٢أ - ٨ = ٠ ، (أ - ٢)(أ + ٤) = ٠ ، وبما أن أ > ٠ فإن **أ = ٢**

١٥) د(س) = (س + $\frac{١}{٢}$)^{٢} - $\frac{١٧}{٤}$ ، القيمة الصغرى ٢- أكبر من

-$\frac{١٧}{٤}$ ، فالرأس خارج المجال.

الحالة الأولى (المجال على يمين الرأس): د(أ) = ٢- ،

أ^{٢} + أ - ٢ = ٠ ، أ = ١ (أو ٢- مرفوضة) ، وعندها د(٤) = ١٦ ✓.

الحالة الثانية (المجال على يسار الرأس): د(أ) = ١٦ ،

أ^{٢} + أ - ٢٠ = ٠ ، أ = ٥- (أو ٤ مرفوضة) ، وعندها د(٢-) = ٢- ✓.

إذن **أ = ١ أو أ = ٥-**

١٦) أ) د(س) = ٢(س - ٢)^{٢} - ٣ ب) محور تماثل المنحنى س = ٢ ، ولكي يكون محور تماثل للجزء المرسوم يجب أن يكون المجال متماثلًا حوله: ٠ ≤ س ≤ ٤ ، أي ك = ٤ ج) ٣- ≤ د(س) ≤ ٥

٢-٢ الدوال المركّبة

يمكن وصف معظم الدوالّ في صورة دالّتَين مركبتَين أو أكثر. فمثلًا: الدالّة س ← ٣س - ٧ هي الدالّة "اضرب في ٣ ، ثم اطرح ٧". إنها تركيب من الدالّتَين د(س) ، هـ(س) حيث:

د : س ← ٣س (الدالّة "اضرب في ٣") هـ : س ← س - ٧ (الدالّة "اطرح ٧")

وعليه ، يمكن وصف س ← ٣س - ٧ في صورة دالّة "طبّق د(س) أوّلًا ، ثم طبّق هـ(س)". إذا طبقنا الدالّة د(س) أوّلًا (س ← ٣س) ، فسوف نستطيع تطبيق الناتج على أنه مدخلة في الدالّة هـ(س ← ٣س - ٧) للحصول على س ← ٣س - ٧

س ← (د) ← د(س) ← (هـ) ← هـ(د(س)) والتركيب الكلي: (هـ ∘ د)(س)

عندما نُتبع دالّة بدالّة أخرى ، يُسمى الناتج **بالدالّة المركّبة** composite function.

نتيجة ٢

(هـ ∘ د)(س) تعني تطبيق الدالّة د(س) على س أولًا ، ثم تطبيق الدالّة هـ(س) على الناتج.

إليك ثلاث نقاط مهمّة يجب تذكّرها عند تركيب الدوالّ:

نتيجة ٣

– تتحقق هـ ∘ د فقط إذا كان مدى الدالّة د(س) مجموعة جزئية من مجال الدالّة هـ(س).

– ليس من الضرورة أن تكون (د ∘ هـ)(س) = (هـ ∘ د)(س) لجميع الدوال.

– (د ∘ د)(س) = د(د(س)).

استكشاف ١

د(س) = ٢س - ٥ ، حيث س ∈ ع هـ(س) = ٣س - ١ ، حيث س ∈ ع

طلب إلى ثلاثة طلبة أن يجدوا دالّة التركيب (هـ ∘ د)(س). إليك الحلول التي قدّموها:

حلّ الطالب (أ):

(هـ ∘ د)(س) = (٣س - ١)(٢س - ٥) = ٦س^{٢} - ١٧س + ٥

حلّ الطالب (ب): (هـ ∘ د)(س) = ٢(٣س - ١) - ٥ = ٦س - ٧

حلّ الطالب (ج): (هـ ∘ د)(س) = ٣(٢س - ٥) - ١ = ٦س - ١٦

ناقش الحلول مع أقرانك في الصف.

أيّ الطلبة قدّم الحلّ الصحيح؟ ما الخطأ الذي ارتكبه كل من الطالبَين الآخرَين؟

مثال ٢

إذا علمت أن د(س) = (س - ٤)^{٢} - ١ ، حيث س ∈ ع ،

هـ(س) = $\frac{٢س + ٣}{س - ٢}$ ، حيث س ∈ ع ، س > ٢. أ) أوجد (د ∘ هـ)(٤). ب) إذا علمت أن مدى د(س) هو د(س) ≥ ١- ، فاشرح سبب عدم إمكانية إيجاد (هـ ∘ د)(س).

الحلّ

أ) (د ∘ هـ)(٤) = د(هـ(٤))

أوجد هـ(٤) أوّلًا: هـ(٤) = $\frac{٢(٤) + ٣}{٤ - ٢}$ = $\frac{١١}{٢}$

د(س) هي الدالّة "اطرح ٤ ، ربّع الناتج ، ثم اطرح ١":

د($\frac{١١}{٢}$) = ($\frac{١١}{٢}$ - ٤)^{٢} - ١ = $\frac{٩}{٤}$ - ١ = $\frac{٥}{٤}$

ب) لأن مدى الدالّة د(س) ليس مجموعة جزئية من مجال الدالّة هـ(س).

مثال ٣

إذا علمت أن د(س) = ٢س + ٣ ، حيث س ∈ ع ،
هـ(س) = س^{٢} - ١ ، حيث س ∈ ع ، فأوجد كلًّا ممّا يأتي: أ) (د ∘ هـ)(س) ب) (هـ ∘ د)(س) ج) (د ∘ د)(س)

الحلّ

أ) (د ∘ هـ)(س) = د(هـ(س)) = د(س^{٢} - ١)

(عوّض عن هـ(س) أوّلًا في الدالّة د(س).)

= ٢(س^{٢} - ١) + ٣

(د(س) هي الدالّة "اضرب في ٢ ، ثم زد ٣".)

= ٢س^{٢} + ١

ب) (هـ ∘ د)(س) = هـ(د(س)) = هـ(٢س + ٣)

(عوّض عن د(س) أوّلًا في الدالّة هـ(س).)

= (٢س + ٣)^{٢} - ١

(هـ(س) هي الدالّة "ربّع ، ثم اطرح ١".)

= ٤س^{٢} + ١٢س + ٩ - ١ = ٤س^{٢} + ١٢س + ٨

ج) (د ∘ د)(س) = د(د(س)) = د(٢س + ٣)

= ٢(٢س + ٣) + ٣

(د(س) هي الدالّة "اضرب في ٢ ، ثم زد ٣".)

= ٤س + ٩

مثال ٤

إذا علمت أن د(س) = س^{٢} + ٤س ، حيث س ∋ ع ، هـ(س) = ٣س - ١ ، حيث س ∋ ع ، فأوجد قيم ك بحيث يكون للمعادلة (د ∘ هـ)(س) = ك حلول حقيقية.

الحلّ

(د ∘ هـ)(س) = (٣س - ١)^{٢} + ٤(٣س - ١)

(فُكّ الأقواس ، ثم بسّط.)

= ٩س^{٢} + ٦س - ٣

عندما (د ∘ هـ)(س) = ك : ٩س^{٢} + ٦س - ٣ = ك

(أعد ترتيب الحدود ، ثم بسّط.)

٩س^{٢} + ٦س + (-٣ - ك) = ٠

لتكون الحلول حقيقية ، فإن: ب^{٢} - ٤أجـ ≥ ٠

٦^{٢} - ٤ × ٩ × (-٣ - ك) ≥ ٠

١٤٤ + ٣٦ك ≥ ٠

ك ≥ -٤

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٢

١) إذا علمت أن د(س) = س^{٢} + ٦ حيث س ∈ ع ،

هـ(س) = $\sqrt{\text{(س + ٣)}}$ - ٢ ، حيث س ≤ -٣ ، فأوجد كلًّا من: أ) (د ∘ هـ)(٦) ب) (هـ ∘ د)(٤) جـ) (د ∘ د)(-٣)

٢) إذا علمت أن ع: س ← س + ٥ حيث س ∈ ع ، س > ٠ ، ل: س ← $\sqrt{\text{س}}$ حيث س ∈ ع ، س > ٠ ، فعبّر عن كل دالّة من الدوالّ الآتية (كدوالّ مركّبة) ، مستخدمًا الدالّة ع(س) أو الدالّة ل(س) أو كليهما:

أ) س ← $\sqrt{\text{س}}$ + ٥ ب) س ← $\sqrt{\text{(س + ٥)}}$ جـ) س ← س + ١٠

٣) إذا علمت أن د(س) = أس + ب حيث س ∈ ع ، د(٥) = ٣ ، د(٣) = ٣-: أ) أوجد قيمة أ وقيمة ب. ب) حلّ المعادلة (د ∘ د)(س) = ٤.

٤) إذا علمت أن د: س ← ٢س + ٣ ، حيث س ∈ ع ، هـ: س ← $\frac{١٢}{س - ١}$ ، حيث س ∈ ع ، س ≠ ١. أ) أوجد (هـ ∘ د)(س) إن أمكن ذلك. ب) حلّ المعادلة د(هـ(س)) = ٢ إن أمكن ذلك.

٥) إذا علمت أن هـ(س) = س^{٢} - ٢ ، حيث س ∈ ع ، ل(س) = ٢س + ٥ ، حيث س ∈ ع. أ) أوجد (هـ ∘ ل)(س). ب) حلّ المعادلة (هـ ∘ ل)(س) = ١٤.

٦) إذا علمت أن د(س) = س^{٢} + ١ حيث س ∈ ع ، هـ(س) = $\frac{٣}{س - ٢}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ ٢. أ) أوجد (د ∘ هـ)(س). ب) حلّ المعادلة (د ∘ هـ)(س) = ٥

٧) إذا علمت أن هـ(س) = $\frac{٢}{س + ١}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ ١-، ل(س) = (س + ٢)^{٢} - ٥ حيث س ∈ ع. أ) أوجد (ل ∘ هـ)(س). ب) حلّ المعادلة (ل ∘ هـ)(س) = ١١

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٨) إذا علمت أن د: س ← $\frac{\text{س} + ١}{٢}$ حيث س ∈ ع ، هـ:

س ← $\frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س} - ١}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ ١. حلّ المعادلة (د ∘ هـ)(س) = ١

٩) إذا كانت د(س) = $\frac{\text{س} + ١}{٢\text{س} + ٥}$ حيث س ∈ ع ، س > ٠ ، فأوجد العبارة الجبرية لـ (د ∘ د)(س) ، واكتب الناتج في أبسط صورة.

١٠) إذا علمت أن د: س ← $\text{س}^{٢}$ حيث س ∈ ع ، هـ:

س ← س + ١ حيث س ∈ ع ، فاكتب كلّ دالّة من الدوالّ الآتية في صورة دالّة مركّبة ، مستخدمًا الدالّة د(س) أو الدالّة هـ(س) أو كليهما:

أ) س ← $(\text{س} + ١)^{٢}$ ب) س ← $\text{س}^{٢} + ١$ ج) س ← س + ٢

د) س ← $\text{س}^{٤}$ هـ) س ← $\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٢$ و) س ← $\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢} + ١$

١١) إذا علمت أن د(س) = $\text{س}^{٢}$ - ٣س حيث س ∈ ع ، هـ(س) = ٢س + ٥ حيث س ∈ ع ، فبيّن أن المعادلة (هـ ∘ د)(س) = ٠ ليس لها حلول حقيقية.

١٢) إذا علمت أن د(س) = ك - ٢س حيث س ∈ ع ، هـ(س) = $\frac{٢}{\text{س}}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ ٠ ، فأوجد قيم ك ليكون للمعادلة (د ∘ هـ)(س) = س حلّان حقيقيان متساويان.

١٣) إذا علمت أن د(س) = س^{٢} - ٣س حيث س ∈ ع ، هـ(س) = ٢س - ٥ حيث س ∈ ع ، فأوجد قيم ك ليكون للمعادلة (هـ ∘ د)(س) = ك حلول حقيقية.

١٤) إذا علمت أن د(س) = $\frac{\text{س} + ٥}{٢\text{س} - ١}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ $\frac{١}{٢}$ ، فبيّن أن (د ∘ د)(س) = س.

١٥) إذا علمت أن د(س) = س^{٢} - ٥س ، حيث س ∈ ع ، هـ(س) = ٢س + ٣ حيث س ∈ ع ، فأوجد: أ) (د ∘ هـ)(س). ب) مدى الدالّة (د ∘ هـ)(س).

١٦) ★ ل(س) = س^{٢} - ١ حيث س ∈ ع ، ك(س) = س + ٢ حيث س ∈ ع ، ع(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ ٠ ، ي(س) = $\sqrt{(\text{س} + ١)}$ - ١ حيث س ∈ ع ، س ≥ -١. تمّ تركيب الدوالّ ل(س) ، ك(س) ، ع(س) ، ي(س) بطريقة ما لتشكيل دالّة جديدة د(س). في كل حالة من الحالات الآتية ، اكتب د(س) بدلالة كل أو مجموعة من الدوالّ ل(س) ، ك(س) ، ع(س) ، ي(س) ، وحدّد مجال كل دالّة مركّبة ومداها:

أ) د(س) = س^{٢} + ٤س + ٣ ب) د(س) = س^{٢} + ١ ج) د(س) = س د) د(س) = ١ + $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$ هـ) د(س) = س + ٤ و) د(س) = س - ٢$\sqrt{(\text{س} + ١)}$ + ١

ورقة الإجابات النموذجية: تمارين ٢-٢

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) أ) هـ(٦) = $\sqrt{٩}$ - ٢ = ١ ، د(١) = ٧ ب) د(٤) = ٢٢ ، هـ(٢٢) = $\sqrt{٢٥}$ - ٢ = ٣ ج) د(-٣) = ١٥ ، د(١٥) = ٢٣١

٢) أ) س ← ع(ل(س)) ، أي (ع ∘ ل)(س) ب) س ← ل(ع(س)) ، أي (ل ∘ ع)(س) ج) س ← ع(ع(س)) ، أي (ع ∘ ع)(س)

٣) أ) ٥أ + ب = ٣ ، ٣أ + ب = -٣ ، بالطرح ٢أ = ٦ ، أ = ٣ ، ب = -١٢ ب) (د ∘ د)(س) = ٣(٣س - ١٢) - ١٢ = ٩س - ٤٨ = ٤ ، س = $\frac{٥٢}{٩}$

٤) أ) (هـ ∘ د)(س) = $\frac{١٢}{٣س + ٣ - ١}$ = $\frac{٦}{س + ١}$ ، س ≠ -١ ب) د(هـ(س)) = $\frac{٢٤}{س - ١}$ + ٣ = ٢ ، $\frac{٢٤}{س - ١}$ = -١ ، س - ١ = -٢٤ ، س = -٢٣

٥) أ) (هـ ∘ ل)(س) = (٢س + ٥)^{٢} - ٢ = ٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٣ ب) (٢س + ٥)^{٢} = ١٦ ، ٢س + ٥ = ±٤ ، س = -$\frac{١}{٢}$ أو س = -$\frac{٩}{٢}$

khaled-math.surge.sh

٦) أ) (د ∘ هـ)(س) = $\frac{٩}{(س - ٢)^{٢}} + ١$ ، س ≠ ٢ ب) $\frac{٩}{(س - ٢)^{٢}} = ٤$ ، $(س - ٢)^{٢} = \frac{٩}{٤}$ ، $س - ٢ = \pm\frac{٣}{٢}$ ، $س = \frac{٧}{٢}$ أو $س = \frac{١}{٢}$

٧) أ) (ل ∘ هـ)(س) = $(\frac{٢}{١ + س} + ٢)^{٢} - ٥ = \frac{٤(س + ٢)^{٢}}{(س + ١)^{٢}} - ٥$ ، س ≠ -١ ب) $(\frac{٢}{١ + س} + ٢)^{٢} = ١٦$ ، $\frac{٢}{١ + س} + ٢ = \pm٤$ ، $\frac{٢}{١ + س} = ٢$ أو -٦ ، $س = ٠$ أو $س = -\frac{٤}{٣}$

٨) (د ∘ هـ)(س) = $\frac{٣س + ٢}{٢(س - ١)} = ١$ ، $٣س + ٢ = ٢س - ٢$ ، $س = -٤$

٩) (د ∘ د)(س) = $\frac{٣س + ٦}{٢س + ٥} \div \frac{١٢س + ٢٧}{٢س + ٥} = \frac{س + ٢}{٤س + ٩}$

١٠) أ) د ∘ هـ ب) هـ ∘ د ج) هـ ∘ هـ د) د ∘ د هـ) هـ ∘ د ∘ هـ و) د ∘ هـ ∘ د

١١) (هـ ∘ د)(س) = $٢(س^{٢} - ٣س) + ٥ = ٢س^{٢} - ٦س + ٥ = ٠$ ، المميّز = $٣٦ - ٤٠ = -٤ < ٠$ ، فلا حلول حقيقية.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

١٢) (د ∘ هـ)(س) = ك − ٤/س = س ، أي س^{٢} − كس + ٤ = ٠ ،
ولتساوي الحلّين: ك^{٢} − ١٦ = ٠ ، ك = ±٤

١٣) (هـ ∘ د)(س) = ٢س^{٢} − ٦س − ٥ = ك ، أي
٢س^{٢} − ٦س − ٥ − ك = ٠ ، المميّز ٣٦ + ٨(٥ + ك) ≥ ٠ ، ك ≤ −١٩/٢

١٤) (د ∘ د)(س) = (س + ٥) + ٥(٢س − ١) / ٢(س + ٥) − (٢س − ١) = ١١س/١١ = س ✓

١٥) أ)
(د ∘ هـ)(س) = (٢س + ٣)^{٢} − ٥(٢س + ٣) = ٤س^{٢} + ٢س − ٦
ب) = ٤(س + ١/٤)^{٢} − ٢٥/٤ ، فالمدى (د ∘ هـ)(س) ≤ −٢٥/٤

١٦) أ) د = ل ∘ ك ، المجال ع ، المدى د(س) ≤ ١− ب)
د = ك ∘ ل ، المجال ع ، المدى د(س) ≤ ١ ج) د = ع ∘ ع ، المجال س ≠ ٠ ، المدى س ≠ ٠ د) د = ك ∘ ل ∘ ع ، المجال س ≠ ٠ ، المدى د(س) > ١ هـ) د = ك ∘ ك ، المجال ع ، المدى ع و) د = ل ∘ ي ، المجال س ≤ ١- ، المدى د(س) ≤ ١-

٢-٣ الدوالّ العكسيّة

الدالّة العكسية **inverse function** للدالّة د(س) هي: الدالّة التي تعكس ما تقوم به الدالّة د(س). نكتب الدالّة العكسية للدالّة د(س) في صورة د$^{-١}$(س).

نتيجة ٤

(د ∘ د$^{-١}$)(س) = (د$^{-١}$ ∘ د)(س) = س.

مجال د$^{-١}$(س) هو مدى د(س).

مدى د$^{-١}$(س) هو مجال د(س).

من المهمّ أن نتذكّر أن ليس لكلّ دالّة دالّة عكسية.

نتيجة ٥

توجد الدالّة العكسية د$^{-١}$(س) إذا كانت الدالّة د(س) واحدًا إلى واحد فقط.

لقد درست سابقًا كيف تجد الدالّة العكسية لبعض الدوالّ واحد إلى واحد البسيطة. مثلًا ، الدالّة العكسية للدالّة س ← ٢س - ١ هي الدالّة $\frac{س + ١}{٢}$.

لإيجاد الدالّة د$^{-١}$(س) ، إذا افترضنا أن ص = د$^{-١}$(س) ، فإن د(ص) = د(د$^{-١}$(س)) = س ، لأن د(س) ، د$^{-١}$(س) دالّتان عكسيّتان. وإذا افترضنا أن س = د(ص) ثم أعدنا ترتيبها ، فسوف نحصل على ص = ... ويكون الجزء الأيسر هو د$^{-١}$(س).

نجد الدالّة العكسية للدالّة د(س) = ٣س - ١ باتباع الخطوات الآتية:

الخطوة ١: اكتب الدالّة في صورة ص = ⟶ ص = ٣س - ١

الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س ، ص ⟶ س = ٣ص - ١

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س ⟵

$$ص = \frac{س + ١}{٣}$$

وعليه ، إذا كانت د(س) = ٣س - ١ ، فإن $د^{-١}(س) = \frac{س + ١}{٣}$

نتيجة ٦

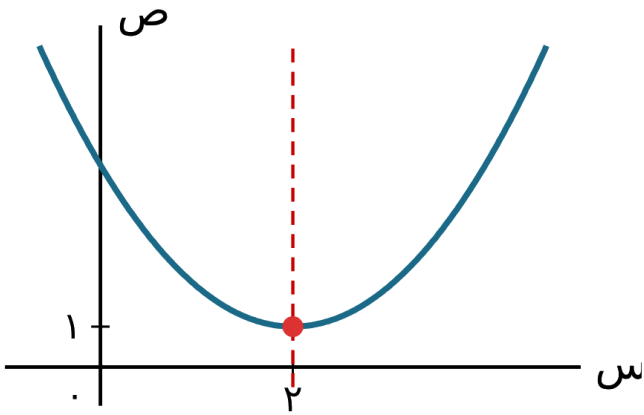
إذا كانت الدالّتان د(س) ، $د^{-١}(س)$ متساويَين ، فتُسمّى الدالّة د(س) **بالدالّة العكسية لنفسها** self-inverse function.

فمثلًا: إذا كانت $د(س) = \frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ ، فإن $د^{-١}(س) = \frac{١}{س}$

لكل س ≠ ٠ وعليه ، تكون $د(س) = \frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠ دالّة عكسية لنفسها.

استكشاف ٢

يبيّن الشكل المجاور الدالّة د(س) = $(س - ٢)^{٢} + ١$ ، حيث س ∈ ع.



ناقش الأسئلة الآتية مع أقرانك في الصف: ١) ما نوع العلاقة في هذه الدالّة؟ ٢) ما إحداثيات رأس منحنى الدالّة؟ ٣) ما مجال الدالّة؟ ٤) ما مدى الدالّة؟ ٥) هل يوجد دالّة عكسية لهذه الدالّة؟ ٦) إذا كان للدالّة د(س) دالّة عكسية ، فما معادلتها؟ وإن لم يوجد لها دالّة عكسية ، فكيف يمكن أن تغيّر مجالها ليصبح لها دالّة عكسية؟

مثال ٥

إذا كانت د(س) = $\sqrt{\text{(س + ٢)}}$ - ٧ ، حيث س ≤ ٢-

أ) أوجد د$^{-١}$(س).

ب) حلّ المعادلة د$^{-١}$(س) = د(٦٢).

الحلّ

أ) د(س) = $\sqrt[٧]{(س + ٢)}$ - ٧

الخطوة ١: اكتب الدالّة في صورة ص = ⟵

ص = $\sqrt[٧]{(س + ٢)}$ - ٧

الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س ، ص ⟵

س = $\sqrt[٧]{(ص + ٢)}$ - ٧

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س

س + ٧ = $\sqrt[٧]{(ص + ٢)}$

$(س + ٧)^{٧}$ = ص + ٢

ص = $(س + ٧)^{٧}$ - ٢

∴ $د^{-١}(س) = (س + ٧)^{٧} - ٢$

الحلّ (تابع)

ب) د(٦٢) = $\sqrt[٧]{(٢ + ٦٢)}$ - ٧ = ٨ - ٧ = ١

اكتب المعادلة.

$(س + ٧)^{٧} - ٢ = ١$

بسّط المعادلة ، وحلّها.

$(س + ٧)^{٧} = ٣$

س + ٧ = $\pm\sqrt[٧]{٣}$

س = ٧- $\pm \sqrt[٧]{٣}$

س = ٧- $- \sqrt[٧]{٣}$ أو س = ٧- $+ \sqrt[٧]{٣}$

مدى الدالّة د(س) ≤ ٧- ، وعليه يكون مجال $د^{-١}(س)$ هو س ≤ ٧-

∴ الحلّ الوحيد للمعادلة $د^{-١}(س)$ = د(٦٢) هو س = ٧- $+ \sqrt[٧]{٣}$

مثال ٦

إذا كانت د(س) = ٥ - (س - ٢)^{٢} ، حيث س ∈ ع ، ك ≤ س ≤ ٦

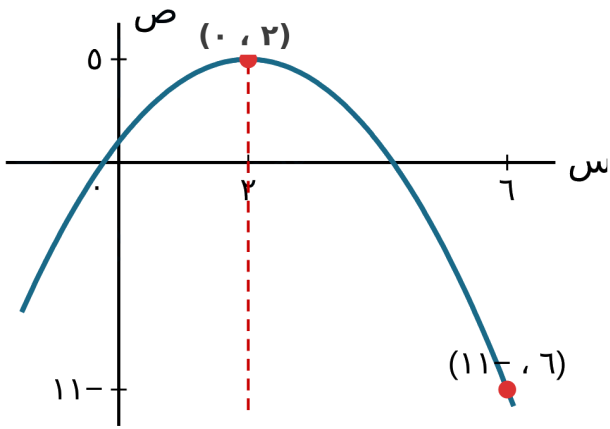
أ) حدّد أقلّ قيمة للعدد ك عندما يوجد للدالّة د(س) دالّة عكسية.

ب) أوجد د$^{-١}$(س) ، ثم أوجد مجال ومدى الدالّة د$^{-١}$(س) مستخدمًا قيمة ك التي وجدتها في الجزئية (أ).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

الحلّ

أ) النقطة (٢ ، ٥) هي رأس منحنى الدالّة
ص = ٥ - (س - ٢)^{٢}
عندما س = ٦ ، فإن ص = ٥ - ٤^{٢} = -١١



يكون للدالّة د(س) دالّة عكسية عندما تكون الدالّة واحدًا إلى واحد.
∴ أقلّ قيمة للثابت ك هي ٢ لأنه عندها تكون الدالّة واحدًا إلى واحد.

الحلّ (تابع)

ب) د(س) = ٥ - (س - ٢)^{٢}

الخطوة ١: ص = ٥ - (س - ٢)^{٢}

الخطوة ٢: س = ٥ - (ص - ٢)^{٢}

الخطوة ٣: (ص - ٢)^{٢} = ٥ - س

ص - ٢ = ± $\sqrt{٥ - س}$

ص - ٢ = $\sqrt{٥ - س}$

(اختر الجذر التربيعي الموجب لأن د$^{-١}$(س) ≥ ٢.)

ص = ٢ + $\sqrt{٥ - س}$

∴ د$^{-١}$(س) = ٢ + $\sqrt{٥ - س}$

مجال د$^{-١}$(س) يساوي مدى د(س)

∴ مجال د$^{-١}$ هو ١١- ≥ س ≥ ٥

مدى د$^{-١}$(س) يساوي مجال د(س)

∴ مدى د$^{-١}$(س) هو ٢ ≥ د$^{-١}$(س) ≥ ٦

تمارين ٢-٣

ا) أوجد د$^{-١}$(س) لكلّ دالّة من الدوالّ الآتية:

أ) د(س) = ٥س - ٨ حيث س ∈ ع

ب) د(س) = س^{٢} + ٣ حيث س ∈ ع ، س ≤ ٠

ج) د(س) = (س - ٥)^{٢} + ٣ حيث س ∈ ع ، س ≤ ٥

د) د(س) = $\frac{٨}{س - ٣}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ ٣

هـ) د(س) = $\frac{\text{س} + ٧}{\text{س} + ٢}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ -٢

و) د(س) = (س - ٢)^{٣} - ١ حيث س ∈ ع ، س ≤ ٢

٢) إذا كانت د : س ← س^{٢} + ٤س حيث س ∈ ع ، س ≤ -٢

أ) اكتب مجال ومدى د$^{-١}$(س).

ب) أوجد د$^{-١}$(س).

٣) إذا كانت د : س ← $\frac{٥}{٢\text{س} + ١}$ حيث س ∈ ع ، س ≤ ٢ ،

فأوجد:

أ) د$^{-١}$(س). ب) مجال د$^{-١}$(س).

٤) إذا كانت د : س ← (س + ١)^{٢} - ٤ حيث س ∈ ع ، س ≤ ٠ ،

فأوجد:

أ) د$^{-١}$(س). ب) مجال د$^{-١}$(س).

٥) إذا كانت هـ : س ← ٢س^{٢} - ٨س + ١٠ حيث س ∈ ع ،

س ≤ ٣

أ) وضّح سبب وجود دالّة عكسية للدالّة هـ(س).

ب) أوجد هـ$^{-١}$(س).

٦) إذا كانت د : س ← ٢س^{٢} + ١٢س - ١٤ حيث س ∈ ع ،

س ≤ ك ، فأوجد:

أ) أقلّ قيمة للثابت ك بحيث تكون عندها الدالّة د(س) واحدًا إلى واحد.

ب) د$^{-١}$(س).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٧) إذا كانت د : س ← س^{٢} - ٦س حيث س ∈ ع.

أ) أوجد مدى الدالّة د(س).

ب) حدّد ما إذا كان للدالّة د دالّة عكسية أم لا ، مبرّرًا ذلك.

٨) إذا كانت د(س) = ٩ - (س - ٣)^{٢} حيث س ∈ ع ، ك ≤ س ≤ ٧

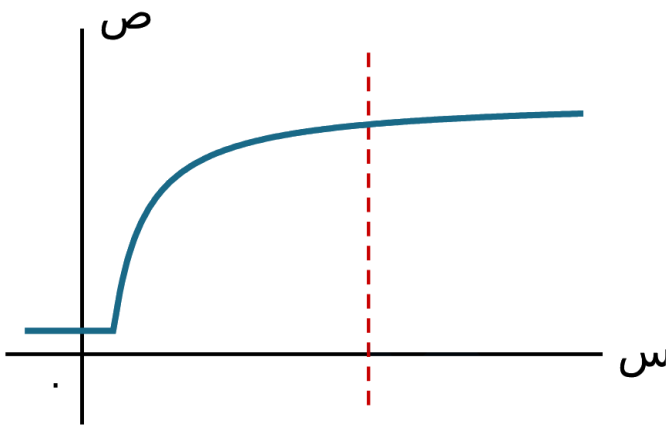
أ) حدّد أقلّ قيمة للثابت ك بحيث تكون الدالّة د(س) واحدًا إلى واحد.

ب) لقيمة ك التي وجدتها في الجزئية (أ): ١) أوجد د$^{-١}$(س). ٢) حدّد مجال الدالّة د$^{-١}$(س) ، ومداها.

٩) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = د$^{-١}$(س) ، حيث

د$^{-١}$(س) = $\frac{٥س - ١}{س}$ لكل س ∈ ع ، ٠ < س ≤ ٣

أ) أوجد د(س). ب) حدّد مجال الدالّة د(س).



١٠) إذا علمت أن د(س) = ٣س + أ حيث س ∈ ع ،
هـ(س) = ب - ٥س حيث س ∈ ع ، فأوجد قيمة كلّ من أ ، ب
علمًا بأن (هـ ∘ د)(١-) = ٢ ، ه‍ـ$^{-١}$(٧) = ١

١١) إذا علمت أن د(س) = ٣س - ١ حيث س ∈ ع ،

هـ(س) = $\frac{٣}{٢س - ٤}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ ٢

أ) أوجد كلّ دالّة من الدالّتَين د$^{-١}$(س) ، ه‍ـ$^{-١}$(س).
ب) بيّن أن للمعادلة د$^{-١}$(س) = ه‍ـ$^{-١}$(س) جذرَين حقيقيَّين.

١٢) إذا كانت د : س ← (٢س - ١)^{٢} - ٣ حيث س ∈ ع ،
١ ≤ س ≤ ٣ ، فأوجد:
أ) د$^{-١}$(س). ب) مجال د$^{-١}$(س).

١٣) إذا كانت د : س ← س^{٢} - ١٠س حيث س ∈ ع ، س ≤ ٥
أ) اكتب د(س) في صورة (س - أ)^{٢} - ب. ب) أوجد د$^{-١}$(س) وحدّد مجال د$^{-١}$(س).

١٤) إذا كانت د(س) = $\frac{١}{س - ١}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ ١

أ) أوجد د$^{-١}$(س).
ب) بيّن أنه إذا كان د(س) = د$^{-١}$(س) ، فإن س^{٢} - س - ١ = ٠
ج) أوجد قيم س حيث د(س) = د$^{-١}$(س). اكتب إجابتك في أبسط صورة.

١٥) حدّد أيّ دالّة من الدوالّ الآتية هي دالّة عكسية لنفسها:

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

أ) د(س) = $\frac{١}{٣ - س}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ ٣

ب) د(س) = $\frac{٢س + ١}{س - ٢}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ ٢

ج) د(س) = $\frac{٣س + ٥}{٤س - ٣}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ $\frac{٣}{٤}$

١٦) إذا علمت أن د : س ← ٣س - ٥ حيث س ∈ ع ، هـ :

س ← ٤ - ٢س حيث س ∈ ع

أ) أوجد (د ∘ هـ)$^{-١}$(س).

ب) أوجد كلّ دالّة من الدوالّ الآتية: ١) (د$^{-١}$ ∘ هـ$^{-١}$)(س) ٢) (هـ$^{-١}$ ∘ د$^{-١}$)(س)

ج) فسّر النواتج التي حصلت عليها في الجزئية (ب). تأكّد ما إذا كانت هذه النواتج صحيحة لدوالّ أخرى.

ورقة الإجابات النموذجية: ٢-٣

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) أ) $د^{-١}(س) = \frac{س + ٨}{٥}$ ب) $د^{-١}(س) = \sqrt{(س - ٣)}$ ، $س \geq ٣$

ج) $د^{-١}(س) = ٥ + \sqrt{(س - ٣)}$ ، $س \geq ٣$ د) $د^{-١}(س) = ٣ + \frac{٨}{س}$

، $س \neq ٠$ هـ) $د^{-١}(س) = \frac{٢س - ٧}{١ - س}$ ، $س \neq ١$ و)
$د^{-١}(س) = ٢ + \sqrt[٣]{(س + ١)}$ ، $س \leq ١-$

٢) أ) المجال $س \leq ٤-$ ، المدى $د^{-١}(س) \leq ٢-$ ب)
$ص = (س + ٢)^{٢} - ٤$ ، فإن $د^{-١}(س) = ٢- + \sqrt{(س + ٤)}$

٣) أ) $د^{-١}(س) = \frac{٥ - س}{٢س}$ ب) مدى د(س) هو $٠ < د(س) \geq ١$ ،
فمجال $د^{-١}(س)$ هو $٠ < س \geq ١$

٤) أ) $د^{-١}(س) = ١- + \sqrt{(س + ٤)}$ ب) مجال $د^{-١}(س)$ هو $س \leq ٣-$

٥) أ) هـ(س) = $٢(س - ٢)^{٢} + ٢$ ، ورأس المنحنى عند س = ٢ ، والمجال $س \leq ٣$ يقع كلّه على يمين الرأس ، فالدالّة واحد إلى واحد. ب) $ه^{-١}(س) = ٢ + \sqrt{(\frac{س - ٢}{٢})}$ ، $س \leq ٤$

٦) د(س) = $٢(س + ٣)^{٢} - ٣٢$ أ) ك = ٣- ب)
$د^{-١}(س) = ٣- + \sqrt{(\frac{س + ٣٢}{٢})}$ ، $س \leq ٣٢-$

٧) د(س) = $(س - ٣)^{٢} - ٩$ أ) المدى $د(س) \leq ٩-$ ب) ليس للدالّة د دالّة عكسية لأنها ليست واحدًا إلى واحد ، فمثلًا د(٠) = د(٦) = ٠

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٨) أ) ك = ٣ ب) ١) $د^{-١}(س) = ٣ + \sqrt{(٩ - س)}$ ٢) المجال $-٧ \le س \le ٩$ ، المدى $٣ \le د^{-١}(س) \le ٧$

٩) أ) $د^{-١}(س) = ٥ - \frac{١}{س}$ ، فإن $د(س) = \frac{١}{٥ - س}$ ب) مجال د(س) هو مدى $د^{-١}(س)$: $س \le \frac{١٤}{٣}$ (ملاحظة: مدى د(س) هو $٠ < د(س) \le ٣$)

١٠) $ه_{-١}(٧) = ١$ تعني هـ(١) = ٧ ، أي ب - ٥ = ٧ ، ب = ١٢ ، (هـ ∘ د)(١-) = ١٢ - ٥(٣- + أ) = ٢٧ - ٥أ = ٢ ، أ = ٥

١١) أ) $د^{-١}(س) = \frac{س + ١}{٣}$ ، $ه_{-١}(س) = ٢ + \frac{٣}{٢س}$ ، $س \neq ٠$ ب) $\frac{س + ١}{٣} = ٢ + \frac{٣}{٢س}$ ، فإن $٢س^{٢} - ١٠س - ٩ = ٠$ ، المميّز = ١٠٠ + ٧٢ = ١٧٢ > ٠ ، فللمعادلة جذران حقيقيّان.

١٢) أ) $د^{-١}(س) = \frac{١ + \sqrt{(س + ٣)}}{٢}$ ب) د(١) = ٢- ، د(٣) = ٢٢ ، فمجال $د^{-١}(س)$ هو $-٢ \le س \le ٢٢$

١٣) أ) $د(س) = (س - ٥)^{٢} - ٢٥$ ب) $د^{-١}(س) = ٥ + \sqrt{(س + ٢٥)}$ ، مجالها $س \ge -٢٥$

خالد كمال khaled-math.surge.sh

١٤) أ) $د^{-١}(س) = ١ + \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$ ب) $\frac{١}{س - ١} = \frac{س + ١}{س}$ ،

فإن $س = س^{٢} - ١$ ، أي $س^{٢} - س - ١ = ٠$ ✓ ج)

$$س = \frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$$

١٥) أ) $د^{-١}(س) = ٣ - \frac{١}{س} \neq د(س)$ ، فليست عكسية لنفسها.

ب) $د^{-١}(س) = \frac{٢س + ١}{س - ٢} = د(س)$ ، فهي عكسية لنفسها. ج)

$د^{-١}(س) = \frac{٣س + ٥}{٤س - ٣} = د(س)$ ، فهي عكسية لنفسها.

١٦) أ) $(د ∘ هـ)(س) = ٣(٤ - ٢س) - ٥ = ٧ - ٦س$ ، فإن

$(د ∘ هـ)^{-١}(س) = \frac{٧ - س}{٦}$ ب) $هـ^{-١}(س) = \frac{٤ - س}{٢}$ ،

$د^{-١}(س) = \frac{س + ٥}{٣}$ ا) $(د^{-١} ∘ هـ^{-١})(س) = \frac{١٤ - س}{٦}$ ٢)

$(هـ^{-١} ∘ د^{-١})(س) = \frac{٧ - س}{٦}$ ج) $(د ∘ هـ)^{-١} = هـ^{-١} ∘ د^{-١}$ ، وهذا صحيح لأيّ دالّتَين لكلّ منهما دالّة عكسية.

٢-٤ منحنى الدالّة ومنحنى دالّتها العكسيّة

لتكن الدالّة المعرّفة في صورة $د(س) = ٢س + ١$ حيث $س \in ع$ ، $-٤ \leq س \leq ٢$

د(-٤) = -٧ ، د(٢) = ٥

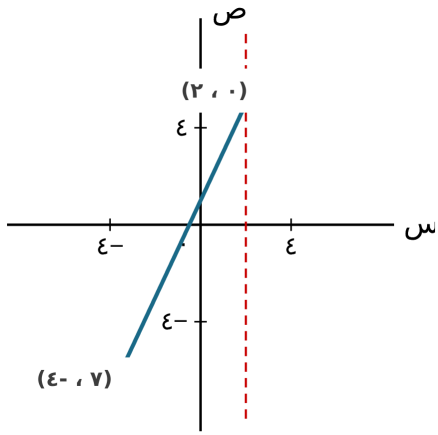
مجال الدالّة د هو -٤ ≤ س ≤ ٢ ، ومداها هو -٧ ≤ د(س) ≤ ٥

الدالّة العكسية للدالّة د(س) هي $د^{-١}(س) = \frac{س - ١}{٢}$

مجال الدالّة $د^{-١}(س)$ هو مدى الدالّة د(س) نفسه ، أي أن مجال $د^{-١}(س)$ هو -٧ ≤ س ≤ ٥

مدى الدالّة $د^{-١}(س)$ هو مجال الدالّة د(س) نفسه ، أي أن مدى $د^{-١}$ هو -٤ ≤ $د^{-١}(س)$ ≤ ٢

يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للدالّتَين د(س) ، $د^{-١}(س)$ على المستوى الإحداثي نفسه.



من المهمّ أن تلاحظ أن أحد منحنيَي د(س) ، د$^{-١}$(س) انعكاس للآخر حول المستقيم ص = س ، ويُعدّ ذلك صحيحًا لجميع الدوالّ واحد إلى واحد ودوالّها العكسية.

نتيجة ٧

– منحنيا الدالّتَين د(س) ، د$^{-١}$(س) أحدهما انعكاس للآخر حول المستقيم ص = س ، يحصل ذلك لأن

(د ∘ د$^{-١}$)(س) = س = (د$^{-١}$ ∘ د)(س).

– عندما تكون الدالّة د(س) عكسية لنفسها ، يكون منحنى الدالّة د(س) متماثلًا حول المستقيم ص = س.

مثال ٧

إذا كانت د(س) = (س - ١)^{٢} - ٢ حيث س ∈ ع ، ١ ≤ س ≤ ٤

ارسم منحنى د(س) ، ومنحنى الدالّة د$^{-١}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه.

الحلّ

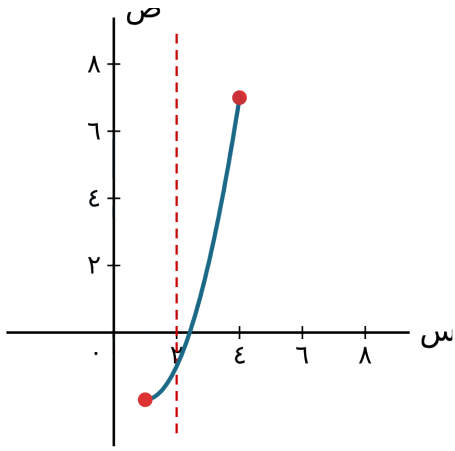
ص = (س - ١)^{٢} - ٢

عندما س = ٤ ، فإن ص = ٧

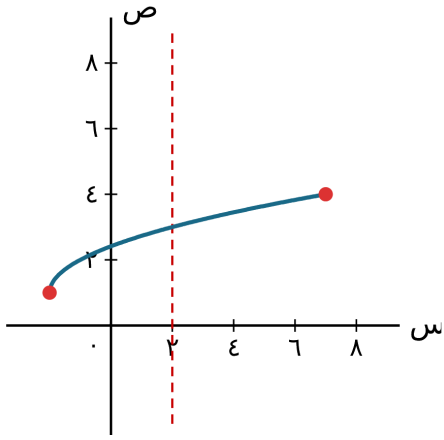
الجزء (س - ١)^{٢} مربّع كامل ، لذا فإنه ≥ ٠ دائمًا. وعليه ، فإن أصغر قيمة يمكن أن يصل إليها هي صفر ، يحصل ذلك عندما س = ١ ، فرأس منحنى الدالّة عند النقطة (١ ، ٢-).

الدالّة واحد إلى واحد ، لذا فإن لها دالّة عكسية.

منحنى د(س):



اعكس د(س) حول المحور ص = س ، فينتج منحنى د$^{-1}$(س) = ١ + $\sqrt{٧}$(س + ٢) ، ٢- ≤ س ≤ ٧:



مثال ٨

إذا كانت د : س ← $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ ٢

أ) أوجد د$^{-١}$(س).

ب) ماذا تستنتج من الجزئية (أ) عن تماثل المنحنى ص = د(س)؟

الحلّ

أ) د : س ← $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

الخطوة ١: اكتب الدالّة في صورة ص = ⟵

ص = $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س ، ص ⟵

س = $\frac{٢ص + ٧}{ص - ٢}$

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س

س(ص - ٢) = ٢ص + ٧

س ص - ٢س = ٢ص + ٧

س ص - ٢ص = ٢س + ٧

ص(س - ٢) = ٢س + ٧

$$ص = \frac{٢س + ٧}{س - ٢}$$

$$\therefore د^{-١}(س) = \frac{٢س + ٧}{س - ٢}$$

ب) $\therefore د^{-١}(س) = د(س)$ ، فإن الدالّة عكسية لنفسها.

منحنى الدالّة متماثل حول المستقيم ص = س.

استكشاف ٣

تقول شهد ما يأتي:

يبيّن الشكلان منحنيَي الدالّتَين د(س) ، هـ(س) معًا مع معكوس كل منهما $د^{-١}(س)$ ، $ه^{-١}(س)$.

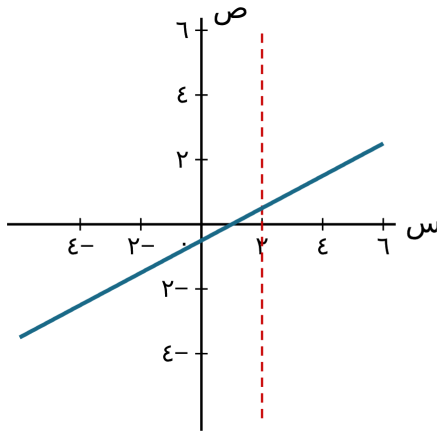
هل ما تقوله شهد صحيح؟ اشرح إجابتك.

(في الكتاب شكلان: منحنى د(س) على شكل قوس يصعد ثم ينزل مع انعكاسه حول ص = س ، ومنحنى هـ(س) على شكل نصف قطع مكافئ جانبي مع انعكاسه حول ص = س.)

تمارين ٢-٤

ا) في كل حالة من الحالات الآتية ، انقل الرسم إلى دفترك ، وارسم منحنى $د^{-١}(س)$ إن وجد:

(أ): مستقيم يمرّ بالنقطتَين (٥- ، ٣-) و (٥ ، ٢) تقريبًا ، وهو يمتد بسهمَين في الاتجاهَين ، والدالّة د(س) على مستقيم ميله $\frac{١}{٢}$.



(ب): منحنى يبدأ من النقطة (٤- ، ٢) تقريبًا ويصعد ببطء مارًّا بالنقطة (٠ ، ٤) حتى (٥ ، ٥) تقريبًا (جذر تربيعي).

(ج): منحنى يبدأ من النقطة (٠ ، ٣) ويتناقص نحو المحور س مارًّا بالنقطة (١ ، ١) تقريبًا حتى (٦ ، ٠) تقريبًا.

(د): منحنى يبدأ عاليًا عند س قريبة من الصفر ، ثم ينزل إلى أدنى نقطة (١ ، ٢) ثم يصعد مرّة أخرى حتى (٦ ، ٦) تقريبًا ، وهو ليس واحدًا إلى واحد.

٢) إذا كانت د : س ← ٢س - ١ ، حيث س ∈ ع ، ١- ≤ س ≤ ٣

أ) أوجد د$^{-١}$(س). ب) حدّد مجال د$^{-١}$(س) ، ومداها.

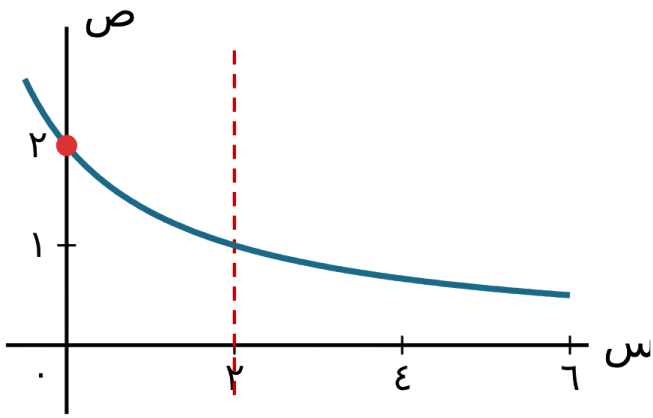
ج) ارسم على المستوى الإحداثي نفسه منحنى ص = د(س) ، ومنحنى ص = د$^{-١}$(س) موضّحًا العلاقة بين المنحنيَين.

٣) يبيّن الشكل المجاور منحنى ص = د(س) عندما

$$د(س) = \frac{٤}{س + ٢} \quad \text{حيث س} \in ع ، س \leq ٠$$

أ) حدّد مدى د(س). ب) اكتب د$^{-١}$(س). ج) حدّد مجال د$^{-١}$(س) ، واكتب مداها.

د) انقل الشكل إلى دفترك ، وارسم منحنى ص = د$^{-١}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه ، موضّحًا العلاقة بين المنحنيَين.



٤) لكلّ دالّة من الدوالّ الآتية ، أوجد د$^{-١}$(س) ، ثم قرّر ما إذا كان منحنى ص = د(س) متماثلًا حول المستقيم ص = س أم لا:

أ) د(س) = $\frac{\text{س} + ٥}{٢\text{س} - ١}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ $\frac{١}{٢}$

ب) د(س) = $\frac{٢\text{س} - ٣}{\text{س} - ٥}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ ٥

ج) د(س) = $\frac{٣\text{س} - ١}{٢\text{س} - ٣}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ $\frac{٣}{٢}$

د) د(س) = $\frac{٤س + ٥}{٣س - ٤}$ حيث س ∈ ع ، س ≠ $\frac{٤}{٣}$

٥) أ) إذا كانت د(س) = $\frac{س + أ}{ب س - ١}$ لكل س ∈ ع ، س ≠ $\frac{١}{ب}$ ، حيث أ ، ب ثابتان ، فبيّن أن الدالّة عكسية لنفسها.

ب) إذا كانت د(س) = $\frac{أ س + ب}{جـ س + د}$ لكل س ∈ ع ، س ≠ -$\frac{د}{جـ}$ ، حيث أ ، ب ، جـ ، د ثوابت ، فأوجد الشرط لتكون الدالّة د(س) عكسية لنفسها.

ورقة الإجابات النموذجية: ٢-٤

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) (أ): د$^{-١}$(س) = ٢س + ١ (انعكاس المستقيم حول ص = س). (ب) ، (جـ): الدالّتان واحد إلى واحد ، فمنحنى د$^{-١}$ هو انعكاس منحنى د حول ص = س. (د): د ليست واحدًا إلى واحد على مجالها كلّه ، فلا توجد د$^{-١}$.

٢) (أ): د$^{-١}$(س) = $\frac{س + ١}{٢}$ (ب): المجال ٣- ≤ س ≤ ٥ ، المدى ١- ≤ د$^{-١}$(س) ≤ ٣ (جـ): المنحنيان متماثلان (أحدهما انعكاس الآخر) حول المستقيم ص = س.

٣) (أ): المدى ٠ < د(س) ≤ ٢ (ب): د$^{-١}$(س) = $\frac{٤}{\text{س}}$ - ٢ (ج): المجال ٠ < س ≤ ٢ ، المدى د$^{-١}$(س) ≤ ٠ (د): منحنى د$^{-١}$ هو انعكاس منحنى د حول ص = س ، ويمرّ بالنقطة (٢ ، ٠).

٤) (أ): د$^{-١}$(س) = $\frac{\text{س} + ٥}{٢\text{س} - ١}$ = د(س) ، فالمنحنى متماثل حول ص = س. (ب): د$^{-١}$(س) = $\frac{٥\text{س} - ٣}{\text{س} - ٢}$ ≠ د(س) ، فالمنحنى غير متماثل حول ص = س. (ج): د$^{-١}$(س) = $\frac{٣\text{س} - ١}{٢\text{س} - ٣}$ = د(س) ، فالمنحنى متماثل. (د): د$^{-١}$(س) = $\frac{٤\text{س} + ٥}{٣\text{س} - ٤}$ = د(س) ، فالمنحنى متماثل.

٥) (أ): ص = $\frac{\text{س} + \text{أ}}{\text{ب س} - ١}$ ، س = $\frac{\text{ص} + \text{أ}}{\text{ب ص} - ١}$ ، س(ب ص - ١) = ص + أ ، ص(ب س - ١) = س + أ ، ص = $\frac{\text{س} + \text{أ}}{\text{ب س} - ١}$ = د(س) ✓

(ب): د$^{-١}$(س) = $\frac{\text{ب} - \text{د س}}{\text{جـ س} - \text{أ}}$ ، وتتساوى مع د(س) عندما أ + د = ٠ (أي د = -أ) مع جـ ≠ ٠.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٢-٥ التحويلات الهندسيّة للدوالّ

تعلّمت سابقًا ، في الصف التاسع ، العديد من التحويلات الهندسيّة المختلفة التي يمكن تطبيقها على الأشكال ثنائية الأبعاد ، وتتضمّن الانسحاب ، والانعكاس ، والدوران ، والتكبير.

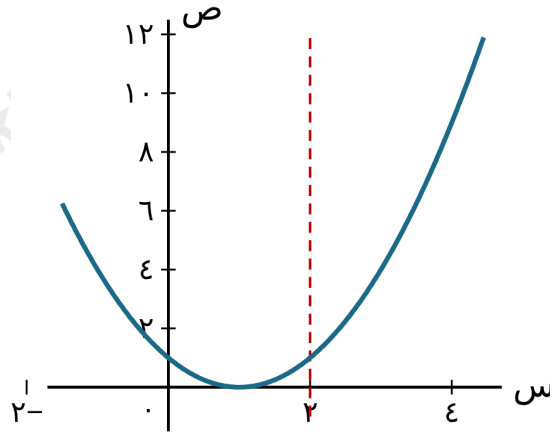
في هذا الدرس ، سوف تتعلّم كيف تستخدم الانسحاب والانعكاس والتمدّد (وتركيبات من هذه التحويلات الهندسية) على منحنى الدالّة.

٢-٥أ الانسحاب

يبيّن الشكل المجاور منحنيَي دالّتَين تختلفان فقط في قيمة الثابت.

ص = س^{٢} - ٢س + ١

ص = س^{٢} - ٢س + ٤



عندما تتساوى الإحداثيات السينية للمنحنيَين (س = س) ، تختلف الإحداثيات الصادية بمقدار ٣ ، أي أن (ص = ص + ٣).

هذا يعني أن للمنحنيَين الشكل نفسه ، لكنهما متباعدان بمقدار ٣ وحدات بالاتجاه الموجب لمحور الصادات.

وعليه ، يمثّل المنحنى ص = س^{٢} - ٢س + ٤ انسحابًا للمنحنى ص = س^{٢} - ٢س + ١ بالمتجه M[٠ ; ٣].

نتيجة ٨

منحنى الدالّة ص = د(س) + ب هو انسحاب لمنحنى الدالّة ص = د(س) بالمتجه M[٠ ; ب].

الآن اعتمد الدالّتَين:

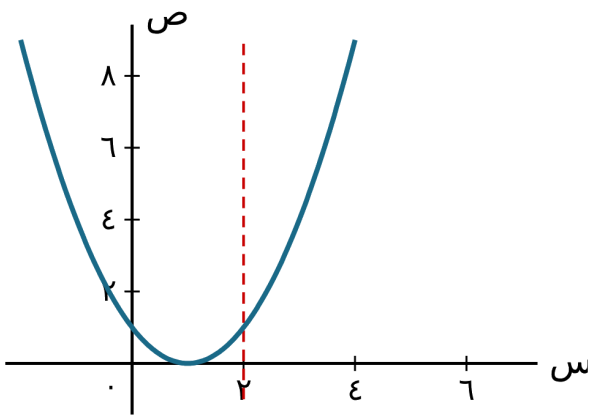
ص = س^{٢} - ٢س + ١

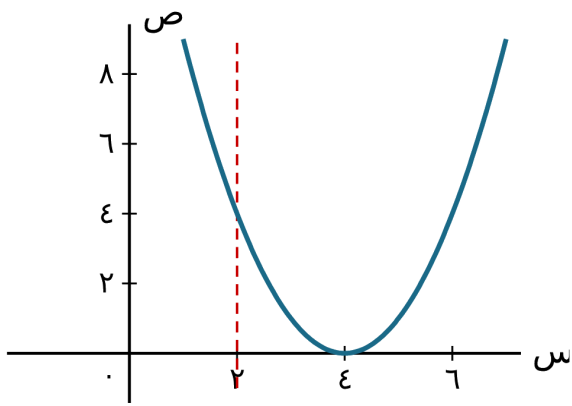
ص = (س - ٣)^{٢} - ٢(س - ٣) + ١

نحصل على الدالّة الثانية باستبدال س بـ (س - ٣) في الدالّة الأولى.

منحنيا الدالّتَين هما:

khaled-math.surge.sh





للمنحنيَين شكل واحد لكنهما متباعدان بمقدار ٣ وحدات باتجاه المحور السيني الموجب.

قد تستغرب أن المنحنى تحرّك باتجاه المحور السيني الموجب ، لاحظ طريقة الحصول على ص = ص باستبدال س بـ (س - ٣) أو بصورة مكافئة س = س + ٣ : هذا يعني أن للمنحنيَين الإحداثي الصادي نفسه (ص = ص) عندما يكون المنحنى الأحمر إلى يمين المنحنى الأزرق بمقدار ٣ وحدات.

لذا فإن المنحنى ص = (س - ٣)^{٢} - ٢(س - ٣) + ١ هو انسحاب للمنحنى ص = س^{٢} - ٢س + ١ بالمتجه M[٣ ; ٠].

نتيجة ٩

منحنى الدالّة ص = د(س - أ) هو انسحاب لمنحنى الدالّة ص = د(س) بالمتجه M[أ ; ٠].

دمج النتيجتَين أعلاه يعطي:

نتيجة ١٠

منحنى الدالّة ص = د(س - أ) + ب هو انسحاب لمنحنى الدالّة ص = د(س) بالمتجه M[أ ; ب].

مثال ٩

تمّ سحب منحنى الدالّة ص = س^{٢} + ٥س وحدتَين إلى اليمين. أوجد معادلة منحنى الدالّة بعد الانسحاب ، واكتب المعادلة في صورة ص = أس^{٢} + ب س + جـ.

الحلّ

ص = س^{٢} + ٥س

ص = (س - ٢)^{٢} + ٥(س - ٢) (استبدل كلّ س بـ (س - ٢)).

ص = س^{٢} + س - ٦ (فُكّ ، وبسّط).

مثال ١٠

تمّ سحب منحنى الدالّة ص = $\sqrt[٧]{(٢س)}$ بالمتجه M[-٥ ; ٣].
أوجد معادلة منحنى الدالّة الناتج.

الحلّ

ص = $\sqrt[٧]{(٢س)}$

ص = $\sqrt[٧]{(٢(س + ٥))}$ + ٣ (استبدل س بـ (س + ٥) ، ثم أضف ٣ على الدالّة الناتجة).

ص = $\sqrt[٧]{(٢س + ١٠)}$ + ٣

تمارين ٢-٥أ

ا) أوجد معادلة كلٍّ ممّا يأتي بعد إجراء التحويل الهندسيّ المطلوب:

أ) ص = ٢س^{٢} بعد إجراء انسحاب بالمتجه M[٠ ; ٤]

ب) ص = $\sqrt[٧]{(٥س)}$ بعد إجراء انسحاب بالمتجه M[٠ ; -٢]

ج) ص = ٧س^{٢} - ٢س بعد إجراء انسحاب بالمتجه M[٠ ; ١]

د) ص = س^{٢} - ١ بعد إجراء انسحاب بالمتجه M[٠ ; ٢]

ه) ص = $\frac{٢}{س}$ بعد إجراء انسحاب بالمتجه M[-٥ ; ٠]

و) ص = $\frac{\text{س}}{\text{س} + ١}$ بعد إجراء انسحاب بالمتجه M[٣ ; ٠]

ز) ص = س^{٢} + س بعد إجراء انسحاب بالمتجه M[-١ ; ٠]

ح) ص = ٣س^{٢} - ٢ بعد إجراء انسحاب بالمتجه M[٢ ; ٣]

٢) أوجد متجه الانسحاب الذي يحوّل منحنى الدالّة الأولى إلى منحنى الدالّة الثانية في كلّ حالة من الحالات الآتية:

أ) ص = س^{٢} + ٥س - ٢ إلى ص = س^{٢} + ٥س + ٢

ب) ص = س^{٣} + ٢س^{٢} + ١ إلى ص = س^{٣} + ٢س^{٢} - ٤

ج) ص = س^{٢} - ٣س إلى ص = (س + ١)^{٢} - ٣(س + ١)

د) ص = س + $\frac{٦}{\text{س}}$ إلى ص = س - ٢ + $\frac{٦}{\text{س} - ٢}$

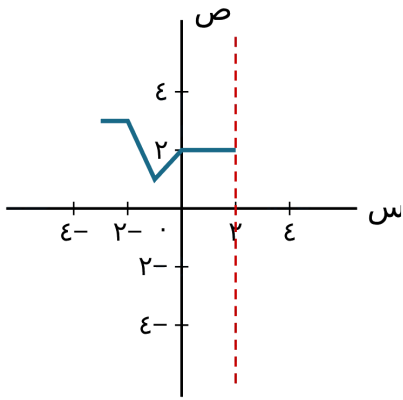
ه) ص = $\sqrt{(٢\text{س} + ٥)}$ إلى ص = $\sqrt{(٢\text{س} + ٣)}$

و) ص = ٣س - $\frac{٥}{\text{س}^{٢}}$ إلى ص = ٣س + ١٠ - $\frac{٥}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$

٣) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = د(س). ارسم منحنى كلّ دالّة من الدوالّ الآتية:

أ) ص = د(س) - ٤ ب) ص = د(س - ٢) ج) ص = د(س + ١) - ٥

خالد — khaled-math.surge.sh



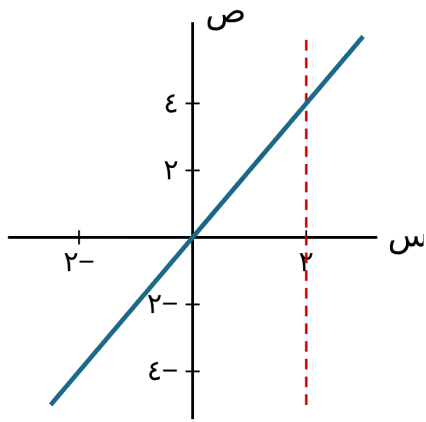
منحنى ص = د(س): قطعة أفقية من (٣- ، ٣) إلى (٢- ، ٣) ، ثم قطعة تنزل إلى (١- ، ١) ، ثم قطعة تصعد إلى (٠ ، ٢) ، ثم قطعة أفقية إلى (٢ ، ٢).

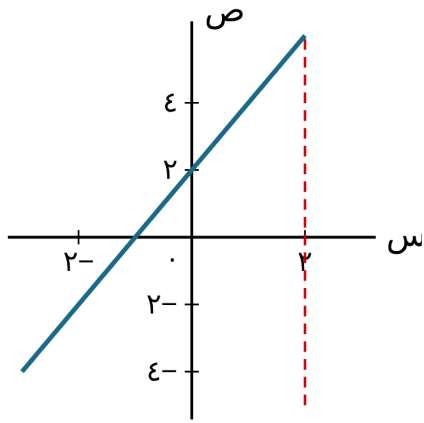
٤) أ) ارسم التمثيل البياني للدالّتَين ص = ٢س ، ص = ٢س + ٢ على المستوى الإحداثي نفسه.

ب) يمكن سحب المستقيم ص = ٢س إلى ص = ٢س + ٢ بإجراء انسحاب بالمتجه M[٠ ; أ]. أوجد قيمة أ.

ج) يمكن سحب المستقيم ص = ٢س إلى ص = ٢س + ٢ بإجراء انسحاب بالمتجه M[ب ; ٠]. أوجد قيمة ب.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh





٥) إذا كانت ص = (س + ٣)(س - ٢)(س - ٥) ، فاكتب معادلتها بصورة مشابهة بعد إجراء انسحاب بالمتجه M[٢ ; ٠].

٦) تمّ سحب منحنى الدالّة ص = س^{٢} - ٤س + ١ بالمتجه M[١ ; ٢].
اكتب معادلة المنحنى الناتج في صورة ص = أس^{٢} + ب س + جـ.

٧) ★ تمّ سحب منحنى الدالّة ص = أس^{٢} + ب س + جـ بالمتجه M[٢ ; -٥] ، فكانت معادلة المنحنى الناتج هي ص = ٢س^{٢} - ١١س + ١٠. أوجد قيمة كلٍّ من: أ ، ب ، جـ.

ورقة الإجابات النموذجية: ٢-٥أ

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) (أ): ص = ٢س^{٢} + ٤ (ب): ص = $\sqrt{(٥س)}$ - ٢ (جـ): ص = ٧س^{٢} - ٢س + ١ (د): ص = س^{٢} + ١

(ه): ص = $\frac{٢}{س + ٥}$ (و): ص = $\frac{س - ٣}{س - ٢}$

(ز): ص = (س + ١)^{٢} + (س + ١) = س^{٢} + ٣س + ٢

(ح):
ص = ٣(س - ٢)^{٢} - ٢ + ٣ = ٣(س - ٢)^{٢} + ١ = ٣س^{٢} - ١٢س + ١٣

٢) (أ): M[٠ ; ٤] (ب): M[٠ ; -٥] (جـ): M[-١ ; ٠] (د): M[٢ ; ٠] (ه): M[١ ; ٠] (و): M[٢ ; ١٦]

٣) (أ): ينزل المنحنى ٤ وحدات. (ب): ينتقل المنحنى وحدتَين إلى اليمين. (جـ): ينتقل وحدة إلى اليسار و٥ وحدات إلى أسفل.

٤) (ب): أ = ٢ (جـ): ٢(س - ب) = ٢س + ٢ ، فإن ب = -١

٥) ص = (س + ١)(س - ٤)(س - ٧)

منصة الأستاذ خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٦) ص = (س - ١)^{٢} - ٤(س - ١) + ١ + ٢ = س^{٢} - ٦س + ٨

٧) المنحنى الناتج هو ص = د(س - ٢) - ٥ = ٢س^{٢} - ١١س + ١٠ ،
فإن د(س - ٢) = ٢س^{٢} - ١١س + ١٥. ضع ع = س - ٢ ، فتكون
د(ع) = ٢(ع + ٢)^{٢} - ١١(ع + ٢) + ١٥ = ٢ع^{٢} - ٣ع + ١
إذن أ = ٢ ، ب = -٣ ، جـ = ١

٢-٥ب الانعكاس

نتيجة ١١

منحنى الدالّة ص = -د(س) هو انعكاس لمنحنى الدالّة ص = د(س) حول المحور السيني.

نتيجة ١٢

منحنى الدالّة ص = د(-س) هو انعكاس لمنحنى الدالّة ص = د(س) حول المحور الصادي.

مثال ١١

لمنحنى الدالّة التربيعية ص = د(س) قيمة صغرى عند النقطة (٥ ، -٧). أوجد إحداثيات رأس المنحنى ، وحدّد ما إذا كانت لمنحنى كلّ دالّة من الدوالّ الآتية نقطة عظمى أو نقطة صغرى:

أ) ص = -د(س) ب) ص = د(-س)

الحلّ

أ) منحنى ص = -د(س) هو انعكاس لمنحنى ص = د(س) حول المحور السيني.
استبدل الإحداثي الصادي للنقطة بمعكوسه.
نقطة التحوّل هي (٥ ، ٧) ، أي إنها النقطة العظمى.

ب) منحنى ص = د(-س) هو انعكاس لمنحنى ص = د(س) حول المحور الصادي.
استبدل الإحداثي السيني للنقطة بمعكوسه.
نقطة التحوّل هي (-٥ ، -٧) ، أي إنها النقطة الصغرى.

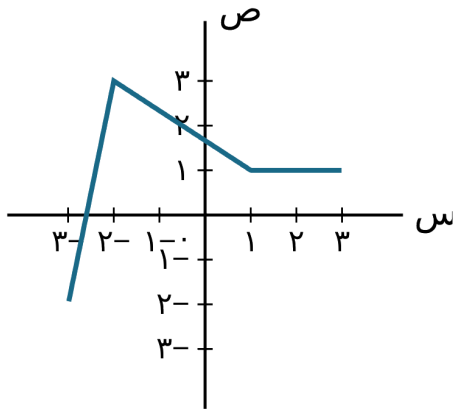
تمارين ٢-٥ب

١) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = هـ(س). ارسم منحنى كلّ دالّة من الدالّتَين الآتيتَين:

أ) ص = -هـ(س) ب) ص = هـ(-س)

منحنى ص = هـ(س): قطعة مستقيمة من (-٣ ، -٢) إلى (-٢ ، ٣) ، ثم قطعة إلى (١ ، ١) ، ثم قطعة أفقية إلى (٣ ، ١).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh



٢) أوجد معادلة كلّ دالّة من الدوالّ الآتية بعد إجراء التحويل الهندسيّ المُعطى:

أ) ص = ٥س^{٢} بعد إجراء انعكاس حول المحور السيني.

ب) ص = ٢س^{٣} بعد إجراء انعكاس حول المحور الصادي.

ج) ص = ٢س^{٢} - ٣س + ١ بعد إجراء انعكاس حول المحور الصادي.

د) ص = ٥ + ٢س - ٣س^{٢} بعد إجراء انعكاس حول المحور السيني.

٣) أوجد التحويل الهندسيّ الذي يحوّل الدالّة الأولى إلى الدالّة الثانية في كلّ حالة من الحالات الآتية:

أ) ص = س^{٢} + ٧س - ٣ إلى ص = -س^{٢} - ٧س + ٣

ب) ص = س^{٢} - ٣س + ٤ إلى ص = س^{٢} + ٣س + ٤

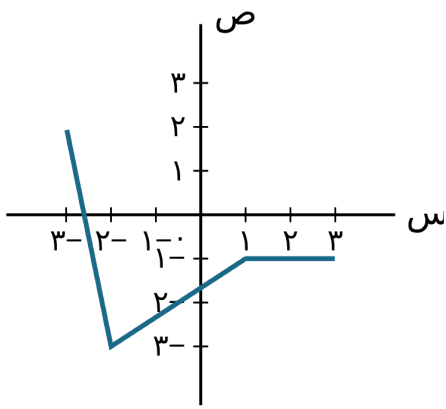
ج) ص = ٢س - ٥س^{٢} إلى ص = ٥س^{٢} - ٢س

د) ص = س^{٣} + ٢س^{٢} - ٣س + ١ إلى
ص = -س^{٣} - ٢س^{٢} + ٣س - ١

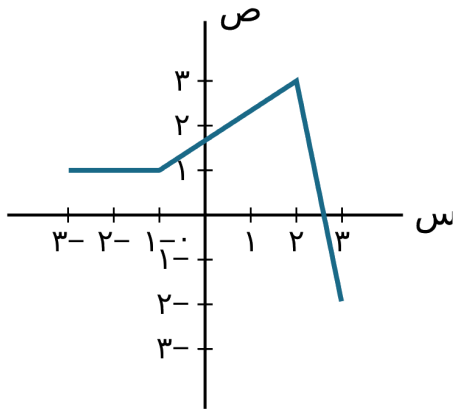
ورقة الإجابات النموذجية: ٢-٥ب

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) (أ): ص = -هـ(س) هو انعكاس حول المحور السيني: النقاط (-٣ ، ٢) ، (-٢ ، -٣) ، (١ ، -١) ، (٣ ، -١).



(ب): ص = هـ(-س) هو انعكاس حول المحور الصادي: النقاط (٣ ، -٢) ، (٢ ، ٣) ، (-١ ، ١) ، (-٣ ، ١).



٢) (أ): ص = ٥-س^{٢} (ب): ص = ٢-س^{٣} (ج): ص = ٢س^{٢} + ٣س + ١

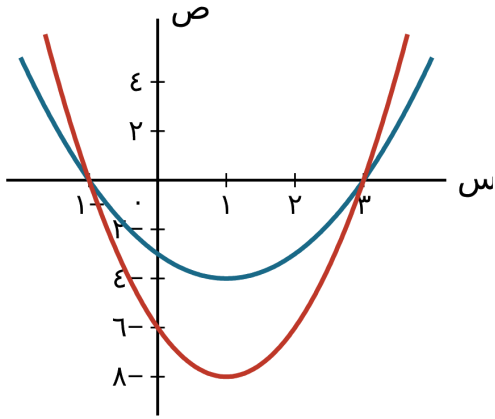
(د): ص = ٥- - ٢س + ٣س^{٢}

٣) (أ): انعكاس حول المحور السيني. (ب): انعكاس حول المحور الصادي. (ج): انعكاس حول المحور السيني. (د): انعكاس حول المحور السيني.

٢-٥ج التمدّد

قارن بين منحنى ص = س^{٢} - ٢س - ٣ ومنحنى الدالّة ص = ٢(س^{٢} - ٢س - ٣). المنحنى الثاني هو تمدّد بالتوازي مع المحور الصادي بمعامل ٢.

يمكن وصف هذا التحويل أيضًا بإحدى العبارات الآتية: تمدّد بمعامل ٢ من الخط ص = ٠ ، أو تمدّد بمعامل ٢ من المحور السيني ، أو تمدّد عموديّ بمعامل ٢ بعيدًا عن المحور السيني.



نتيجة ١٣

منحنى الدالّة ص = أ د(س) هو تمدّد لمنحنى الدالّة ص = د(س) بمعامل أ بالتوازي مع المحور الصادي.

ملاحظة: إذا كان أ < ٠ فهو تمدّد (بمعامل موجب) يتبعه انعكاس حول المحور السيني.

وعند مقارنة ص = س^{٢} - ٢س - ٣ مع ص = (٢س)^{٢} - ٢(٢س) - ٣

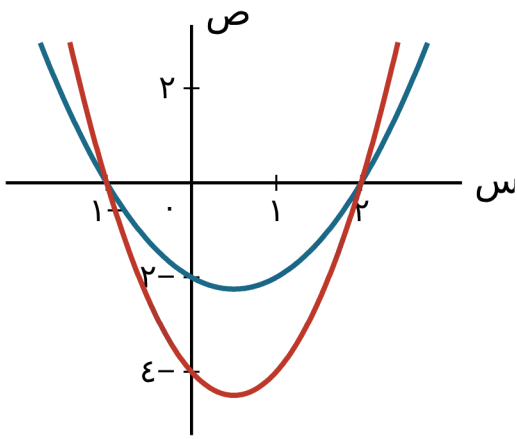
نجد أن الثانية تمدّد بمعامل $\frac{١}{٢}$ بالتوازي مع المحور السيني.

نتيجة ١٤

منحنى الدالّة ص = د(أ س) هو تمدّد لمنحنى الدالّة ص = د(س) بمعامل $\frac{١}{أ}$ بالتوازي مع المحور السيني.

مثال ١٢

يبيّن الشكل منحنيَين: د(س) ومنحنى هـ(س) الناتج عن تمدّد د(س). للمنحنى د(س) نقطتا تقاطع مع المحور السيني عند س = ١- ، س = ٢ ، وتقاطع مع المحور الصادي عند ص = ٢- ، ورأسه (٠,٥ ، ٢,٢٥-). ولـ هـ(س) نقطتا التقاطع السينيتان نفسهما ورأسه (٠,٥ ، ٤,٥-).



أ) أوجد د(س).

ب) صف التحويل الذي حوّل د(س) إلى هـ(س) ، ثم أوجد هـ(س).

الحلّ

أ) د(س) = (س + ١)(س - ٢) = س^{٢} - س - ٢

ب) الإحداثي الصادي للرأس تضاعف من ٢,٢٥- إلى ٤,٥- ، ونقطتا التقاطع السينيتان ثابتتان.

إذن هو تمدّد بمعامل ٢ بالتوازي مع المحور الصادي.

هـ(س) = ٢د(س) = ٢س^{٢} - ٢س - ٤

مثال ١٣

تمدّد منحنى الدالّة ص = ٥ - $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ بمعامل ٤ بالتوازي مع المحور الصادي. أوجد معادلة المنحنى الناتج.

الحلّ

ص = ٤(٥ - $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$) = ٢٠ - ٢س^{٢}

مثال ١٤

صف التحويل الذي يحوّل المنحنى ص = س^{٢} - ٣س - ٥ إلى المنحنى ص = ٤س^{٢} - ٦س - ٥.

الحلّ

د(٢س) = (٢س)^{٢} - ٣(٢س) - ٥ = ٤س^{٢} - ٦س - ٥

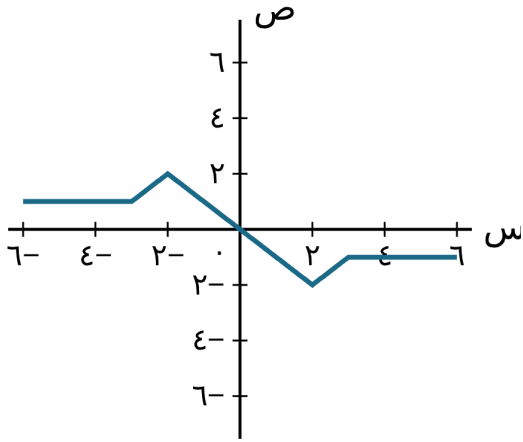
إذن هو تمدّد بمعامل $\frac{١}{٢}$ بالتوازي مع المحور السيني.

تمارين ٢-٥ج

١) يبيّن الشكل منحنى الدالّة ص = د(س). ارسم منحنى كلّ دالّة ممّا يأتي:

أ) ص = ٣د(س) ب) ص = د(٢س)

منحنى ص = د(س): مستقيمات متتالية بين النقاط (٦- ، ١) ، (٣- ، ١) ، (٢- ، ٢) ، (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٢-) ، (٣ ، ١-) ، (٦ ، ١-).



٢) أوجد معادلة الدالّة الناتجة عن إجراء التحويل المُعطى:

أ) ص = ٣س^{٢} ، تمدّد بمعامل ٢ بالتوازي مع المحور الصادي.

ب) ص = س^{٢} - ١ ، تمدّد بمعامل ٣ بالتوازي مع المحور الصادي.

ج) ص = ٢س$^{-}$ + ٤ ، تمدّد بمعامل $\frac{١}{٢}$ بالتوازي مع المحور الصادي.

د) ص = ٢س^{٢} - ٨س + ١٠ ، تمدّد بمعامل ٢ بالتوازي مع المحور السيني.

هـ) ص = ٦س^{٣} - ٣٦س ، تمدّد بمعامل $\frac{١}{٣}$ بالتوازي مع المحور السيني.

٣) صف التحويل الذي يحوّل الدالّة الأولى إلى الثانية:

أ) ص = س^{٢} + ٢س - ٥ إلى ص = ٤س^{٢} + ٤س - ٥

ب) ص = س^{٢} - ٣س + ٢ إلى ص = ٣س^{٢} - ٩س + ٦

ج) ص = ٢س$^{-١}$ + ١ إلى ص = ٢س$^{-(١+١)}$ + ٢

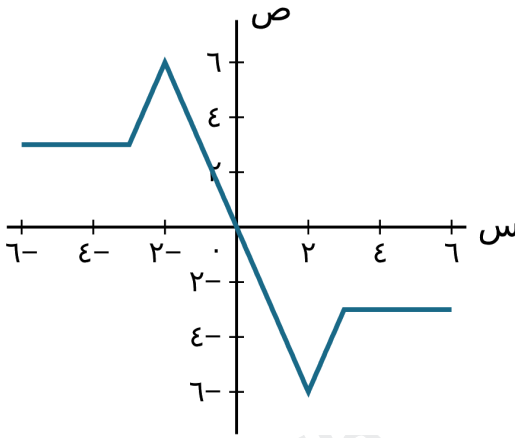
د) ص = $\sqrt{(س - ٦)}$ إلى ص = $\sqrt{(٣س - ٦)}$

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٥ج

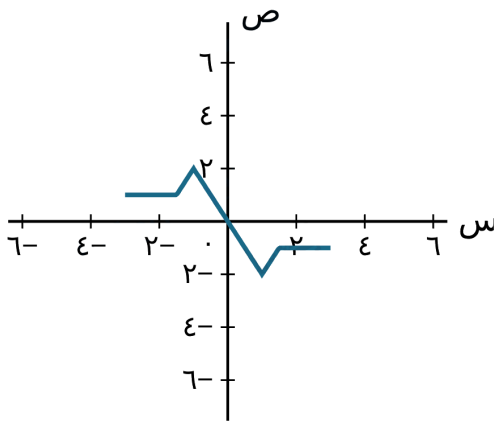
(الإجابات من حسابي؛ في ٣(ج) يصعب قراءة الأُسّ في المطبوع، واستُعملت القراءة التي تعطي نتيجة منطقية.)

١) أ) ص = ٣د(س) : تُضرب الإحداثيات الصادية في ٣، فتصبح النقاط (-٦ ، ٣) ، (-٣ ، ٣) ، (-٢ ، ٦) ، (٠ ، ٠) ، (٢ ، -٦) ، (٣ ، -٣) ، (٦ ، -٣).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh



ب) ص = د(٢س) : تُقسم الإحداثيات السينية على ٢، فتصبح النقاط (٣- ، ١) ، (١,٥- ، ١) ، (١- ، ٢) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ٢-) ، (١,٥ ، ١-) ، (٣ ، ١-).



٢) أ) ص = ٦س^{٢} ب) ص = ٣س^{٢} - ٣



ج) ص = ٢س^-١ + ٢ ، أي $\frac{١}{٢}$ × ٢س^-٢ + ٢

د) ص = $\frac{١}{٢}$س^٢ - ٤س + ١٠

هـ) ص = ٦٢اس^٣ - ١٠٨اس

٣) أ) تمدّد بمعامل $\frac{١}{٢}$ بالتوازي مع المحور السيني، لأن الثانية هي د(٢س).

ب) تمدّد بمعامل ٣ بالتوازي مع المحور الصادي، لأن الثانية هي ٣د(س).

ج) تمدّد بمعامل ٢ بالتوازي مع المحور الصادي.

د) تمدّد بمعامل $\frac{١}{٣}$ بالتوازي مع المحور السيني، لأن الثانية هي د(٣س).

٦-٢ تركيب التحويلات الهندسيّة

يلخّص الجدول الآتي التحويلات العمودية والأفقية.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh



	تحويل عموديّ	تحويل أفقيّ
انسحاب	ص = د(س) + أ بالمتجه M[٠ ; أ]	ص = د(س + أ) بالمتجه M[-أ ; ٠]
انعكاس	ص = -د(س) حول المحور السيني	ص = د(-س) حول المحور الصادي
تمدّد	ص = أ د(س) بمعامل أ	ص = د(أ س) بمعامل $\frac{١}{أ}$ ، أ ≠ ٠

انتبه إلى الترتيب عند تركيب التحويلات.

استكشاف ٤

يُعطى مثلّث رؤوسه (٠ ، ٠) ، (١ ، ٢) ، (٣ ، ٠) ، وتُطبَّق عليه تحويلات هندسيّة مركّبة بترتيبَين مختلفَين ، ثم تُقارَن النتائج. (نشاط استكشافيّ بلا إجابة محدّدة.)

نتيجة ١٥

عند تركيب تحويلَين عموديَّين أو تحويلَين أفقيَّين يتغيّر الناتج إذا تغيّر الترتيب. أما عند تركيب تحويل أفقيّ مع تحويل عموديّ فلا يتأثر الناتج بالترتيب.

تركيب تحويلَين عموديَّين

د(س) ← أ د(س) ← أ د(س) + ك

نتيجة ١٦

تتبع التحويلات العمودية ترتيب العمليات الحسابيّة نفسه.

تركيب تحويلَين أفقيَّين

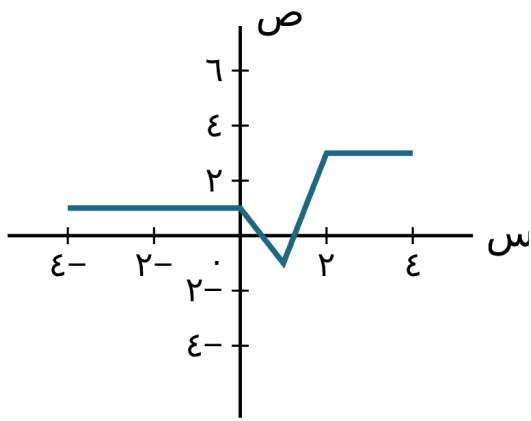
د(س) ← د(س + جـ) ← د(ب س + جـ)

نتيجة ١٧

تتبع التحويلات الأفقية عكس ترتيب العمليات الحسابيّة.

مثال ١٥

يبيّن الشكل منحنى الدالّة ص = د(س). ارسم منحنى الدالّة ص = ٢د(س) - ٣.



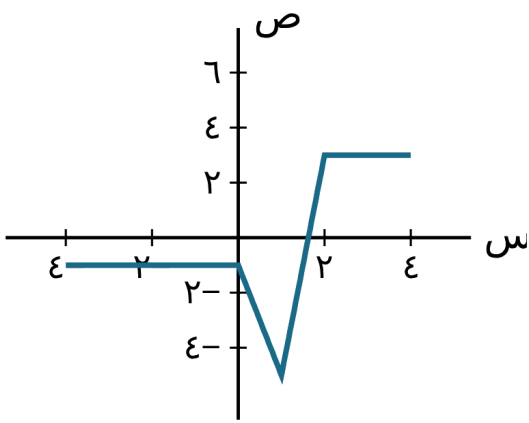
الحلّ

الخطوة ١: ص = ٢د(س) : تُضرب الإحداثيات الصادية في ٢.

النقاط: (٤- ، ٢) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ٢-) ، (٢ ، ٦) ، (٤ ، ٦).

الخطوة ٢: انسحاب بالمتجه M[٠ ; ٣-].

النقاط: (٤- ، ١-) ، (٠ ، ١-) ، (١ ، ٥-) ، (٢ ، ٣) ، (٤ ، ٣).



مثال ١٦

حوّل منحنى الدالّة ص = س^{٢} إلى منحنى الدالّة ص = هـ(س) = (٢س - ٤)^{٢}.

أ) صف تحويلَين هندسيَّين مختلفَين يحقّقان ذلك. ب) أوجد هـ(س).

الحلّ

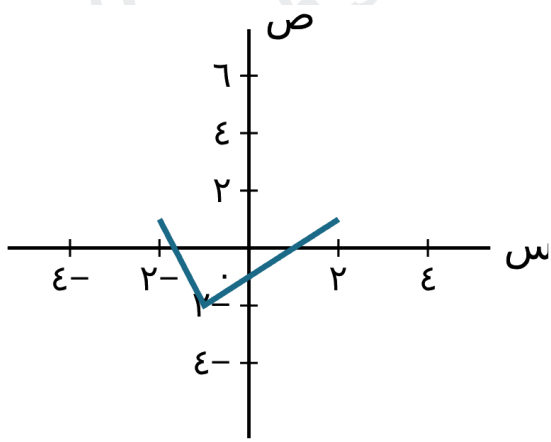
أ) الطريقة ١: انسحاب بالمتجه M[٤ ; ٠] ، ثم تمدّد بمعامل $\frac{١}{٢}$ بالتوازي مع المحور السيني.

الطريقة ٢: تمدّد بمعامل $\frac{١}{٢}$ بالتوازي مع المحور السيني ، ثم انسحاب بالمتجه M[٢ ; ٠].

ب) هـ(س) = (٢س - ٤)^{٢}

تمارين ٢-٦

١) يبيّن الشكل منحنى الدالّة ص = هـ(س) : قطعتان مستقيمتان بين النقاط (٢- ، ١) ، (١- ، ٢-) ، (٢ ، ١). ارسم منحنى كلّ دالّة من الدوالّ الآتية:



أ) ص = هـ(س + ٢) + ٣	ب) ص = ٢هـ(س) + ١
ج) ص = ٢ - هـ(س)	د) ص = ٢هـ(-س) + ١
هـ) ص = ٢-هـ(س) - ١	و) ص = هـ(٢س) + ٣
ز) ص = هـ(٢س - ٦)	ح) ص = هـ(-س + ١)

٢) حوّل منحنى الدالّة ص = س^{٢} بتركيب انسحاب بالمتجه M[١ ; ٠] وتمدّد بمعامل ٣ بالتوازي مع المحور الصادي: أ) تمدّد أولًا ثم انسحاب. ب) انسحاب أولًا ثم تمدّد. ما معادلة المنحنى الناتج في كلّ حالة؟ وهل يتغيّر الناتج؟

٣) حوّل منحنى الدالّة ص = س^{٢} بتركيب تمدّد بمعامل ٢ بالتوازي مع المحور السيني وانسحاب بالمتجه M[٥ ; ٠] : أ) تمدّد أولًا ثم انسحاب. ب) انسحاب أولًا ثم تمدّد. ج) ارسم المنحنيات الثلاثة على الشكل نفسه (ص = س^{٢} والمنحنيَين الناتجَين).

٤) د(س) = س^{٢} + ١. أوجد معادلة المنحنى الناتج بعد كلّ تركيب: أ) انسحاب بالمتجه M[٠ ; ٥-] ثم تمدّد بمعامل ٢ بالتوازي مع المحور الصادي. ب) انسحاب بالمتجه M[٢ ; ٠] ثم انعكاس حول المحور السيني.

٥) اكتب معادلة المنحنى الناتج عن منحنى ص = هـ(س) بعد: أ) انعكاس حول المحور السيني ثم تمدّد بمعامل ٢ بالتوازي مع المحور الصادي. ب) انسحاب بالمتجه M[٢ ; ٣-] ثم انعكاس حول المحور الصادي.

٦) صف تحويلَين هندسيَّين متتاليَين يحوّلان منحنى ص = د(س) إلى كلّ من:

أ) ص = $\frac{١}{٢}$د(س) + ٣	ب) ص = -د(س) + ٢
ج) ص = د(٢س - ٦)	د) ص = ٢د(س) - ٨

٧) صف مجموعة التحويلات التي تحوّل المنحنى الأول إلى الثاني:

أ) ص = س^{٢} إلى ص = $\frac{١}{٢}$(س + ٥)^{٢}

ب) ص = س^{٢} إلى ص = -$\frac{١}{٢}$(س + ١)^{٢} - ٢

ج) ص = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ إلى ص = ٢-$\sqrt[٣]{\text{(س - ٣)}}$ + ٤

٨) د(س) = $\sqrt{\text{س}}$. اكتب معادلة المنحنى الناتج بعد تطبيق التحويلات الآتية بالترتيب:

أ) انعكاس حول المحور السيني ، انسحاب بالمتجه M[٠ ; ٣] ، انسحاب بالمتجه M[١ ; ٠] ، تمدّد بمعامل ٢ بالتوازي مع المحور السيني.

ب) انسحاب بالمتجه M[٠ ; ٣] ، تمدّد بمعامل ٢ بالتوازي مع المحور السيني ، انعكاس حول المحور السيني ، انسحاب بالمتجه M[١ ; ٠].

٩) هـ(س) = س^{٢}. اكتب معادلة المنحنى الناتج بعد تطبيق التحويلات الآتية بالترتيب:

أ) انسحاب بالمتجه M[-٤ ; ٠] ، انعكاس حول المحور السيني ، انسحاب بالمتجه M[٠ ; ٢] ، تمدّد بمعامل ٣ بالتوازي مع المحور الصادي.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ب) تمدّد بمعامل ٣ بالتوازي مع المحور الصادي ، انسحاب بالمتجه M[٠ ; ٢] ، انعكاس حول المحور السيني ، انسحاب بالمتجه M[٤- ; ٠].

١٠) ★ د(س) = $\sqrt{س}$ ، هـ(س) = $\sqrt{-س - ٣}$. صف تحويلَين مختلفَين (ترتيبهما مختلف) يحوّلان منحنى د إلى منحنى هـ ، ثم ارسم المنحنيَين على الشكل نفسه.

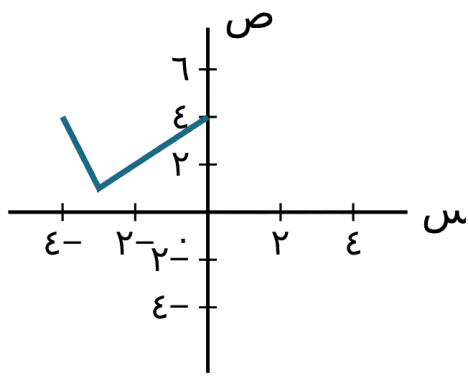
١١) ★ حُوِّل منحنى ص = د(س) إلى منحنى ص = د(٢س + ١٠). صف تحويلَين مختلفَين يحقّقان ذلك.

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٦

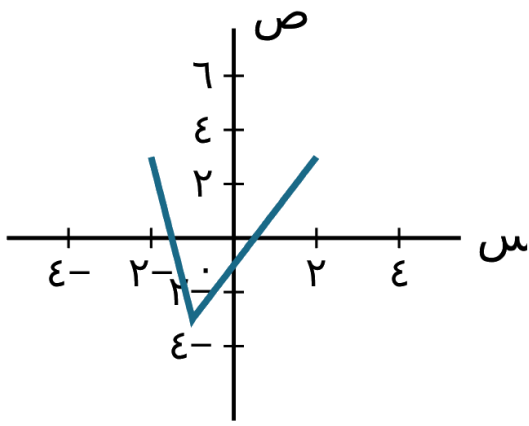
ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) الرسوم بالنقاط المحدّدة (قطعتان مستقيمتان في كلّ شكل):

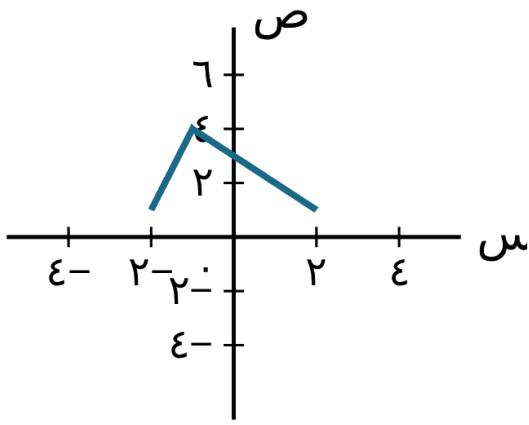
أ) ص = هـ(س + ٢) + ٣ : (٤-، ٤) ، (٣-، ١) ، (٠، ٤)



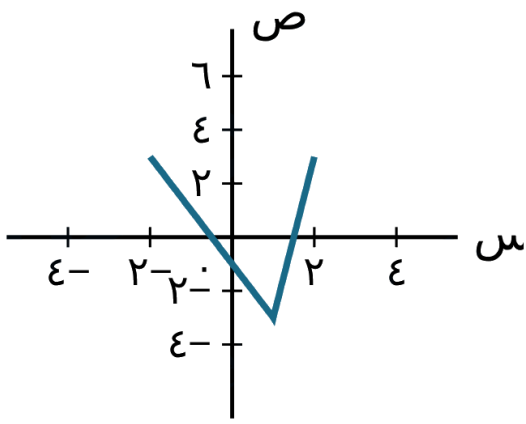
ب) ص = ٢هـ(س) + ١ : (-٢ ، ٣) ، (-١ ، -٣) ، (٢ ، ٣)



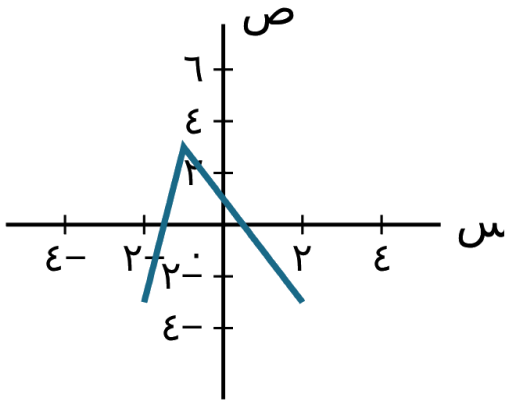
ج) ص = ٢ - هـ(س) : (-٢ ، ١) ، (-١ ، ٤) ، (٢ ، ١)



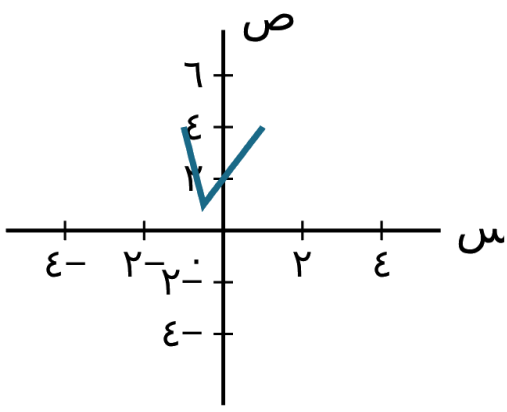
د) ص = ٢هـ(-س) + ١ : (-٢ ، ٣) ، (١ ، -٣) ، (٢ ، ٣)



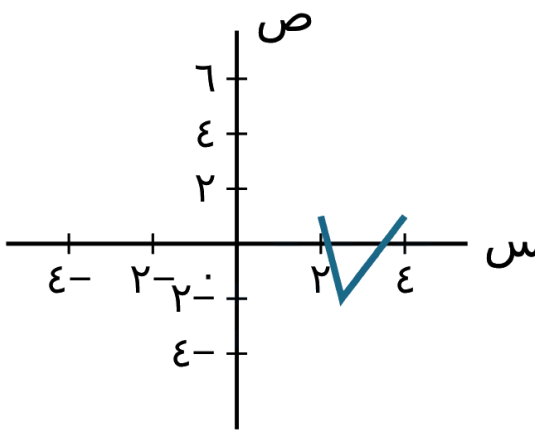
هـ) ص = ٢-هـ(س) - ١ : (٢-، ٣-) ، (١-، ٣) ، (٢، ٣-)



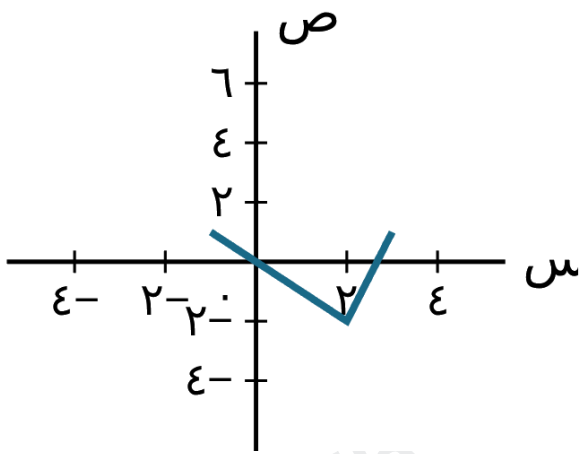
و) ص = هـ(٢س) + ٣ : (١-، ٤) ، (٠,٥-، ١) ، (١، ٤)



ز) ص = هـ(٢س - ٦) : (٢ ، ١) ، (٢,٥ ، ٢-) ، (٤ ، ١)



ح) ص = هـ(-س + ١) : (١- ، ١) ، (٢ ، ٢-) ، (٣ ، ١)



٢) أ) تمدّد بمعامل ٣ ثم انسحاب بالمتجه M[١ ; ٠] :
ص = ٣(س − ١)^{٢} . ب) انسحاب بالمتجه M[١ ; ٠] ثم تمدّد بمعامل ٣ : ص = ٣(س − ١)^{٢} . الناتج نفسه ، لأن أحد التحويلَين أفقيّ والآخر عموديّ.

٣) أ) تمدّد بمعامل ٢ ثم انسحاب بالمتجه M[٥ ; ٠] :

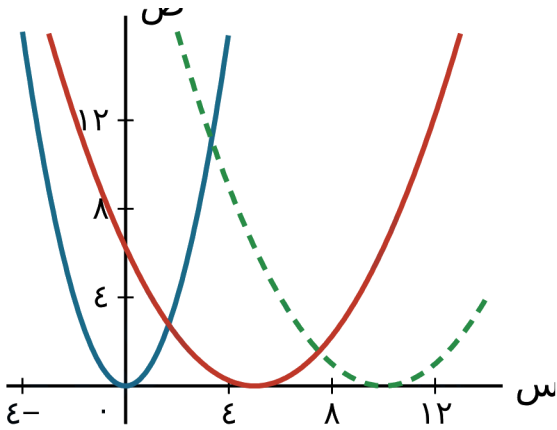
$$ص = \frac{(س - ٥)^{٢}}{٤}$$

ب) انسحاب بالمتجه M[٥ ; ٠] ثم تمدّد بمعامل ٢ :

$$ص = \frac{(س - ١٠)^{٢}}{٤}$$

ج) الشكل: المنحنى ص = س^{٢} مع المنحنيَين السابقَين.

khaled-math.surge.sh



٤) أ) د(س) = ٥ - س^{٢} - ٤ ثم ٢ × (س^{٢} - ٤) : ص = ٢س^{٢} - ٨

ب) د(س - ٢) = (س - ٢)^{٢} + ١ ثم الانعكاس :

ص = -(س - ٢)^{٢} - ١ = -س^{٢} + ٤س - ٥

٥) أ) ص = ٢-هـ(س) ب) ص = هـ(-س - ٢) - ٣

٦) أ) تمدّد بمعامل $\frac{١}{٢}$ بالتوازي مع المحور الصادي ، ثم انسحاب بالمتجه M[٠ ; ٣].

ب) انعكاس حول المحور السيني ، ثم انسحاب بالمتجه M[٠ ; ٢].

ج) د(٢س - ٦) = د(٢(س - ٣)) : تمدّد بمعامل $\frac{١}{٢}$ بالتوازي مع المحور السيني ، ثم انسحاب بالمتجه M[٣ ; ٠].

د) تمدّد بمعامل ٢ بالتوازي مع المحور الصادي ، ثم انسحاب بالمتجه M[٠ ; ٨-].

khaled-math.surge.sh

٧) أ) انسحاب بالمتجه M[-٥ ; ٠] ، ثم تمدّد بمعامل $\frac{١}{٢}$ بالتوازي مع المحور الصادي.

ب) انسحاب بالمتجه M[-١ ; ٠] ، تمدّد بمعامل $\frac{١}{٢}$ بالتوازي مع المحور الصادي ، انعكاس حول المحور السيني ، انسحاب بالمتجه M[٠ ; ٢-].

ج) انسحاب بالمتجه M[٣ ; ٠] ، تمدّد بمعامل ٢ بالتوازي مع المحور الصادي ، انعكاس حول المحور السيني ، انسحاب بالمتجه M[٠ ; ٤].

٨) أ) ص = $-\sqrt{\frac{\text{س}}{٢} - ١}$ + ٣

ب) ص = $-\sqrt{\frac{\text{س} - ١}{٢}}$ - ٣

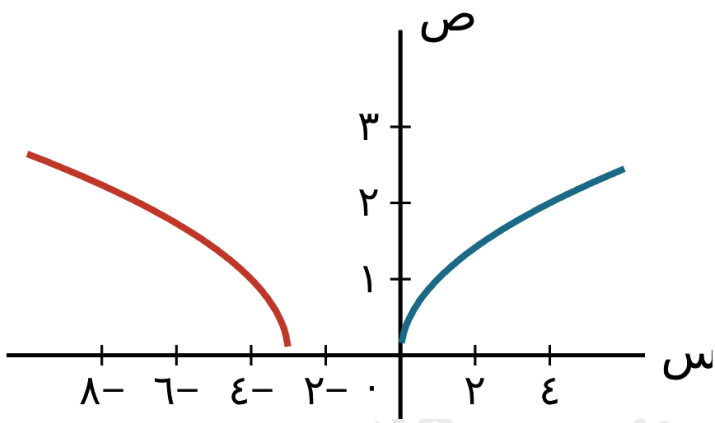
الخطوات: يُستبدل س بـ $\frac{\text{س}}{٢}$ في التمدّد الأفقيّ ، وس - ١ في الانسحاب الأفقيّ.

٩) أ) ص = ٣-(س + ٤)^{٢} + ٦

ب) ص = ٣-(س + ٤)^{٢} - ٢

١٠) الطريقة ١: انسحاب بالمتجه M[٣ ; ٠] ثم انعكاس حول المحور الصادي. الطريقة ٢: انعكاس حول المحور الصادي ثم انسحاب بالمتجه M[٣- ; ٠].

خالد كمال
khaled-math.surge.sh



II) الطريقة ١: تمدّد بمعامل $\frac{١}{٢}$ بالتوازي مع المحور السيني ، ثم انسحاب بالمتجه M[0- ; ٠].

الطريقة ٢: انسحاب بالمتجه M[١٠- ; ٠] ، ثم تمدّد بمعامل $\frac{١}{٢}$ بالتوازي مع المحور السيني.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

الدوالّ

• العلاقة هي ارتباط بين عناصر مجموعة ما بعناصر مجموعة أخرى.

حالد كمال
khaled-math.surge.sh

الدالّة هي علاقة بين عناصر مجموعتين ، حيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.

جميع الدوالّ عبارة عن علاقات ، لكن ليست كل علاقة دالّة.

• قد تكون الدالّة واحدًا إلى واحد أو متعدّدًا إلى واحد.

• تُسمّى مجموعة المدخلات مجال الدالّة.

• تُسمّى مجموعة المخرجات مدى الدالّة.

الدوالّ المركّبة

• (د ∘ هـ)(س) تعني تطبيق الدالّة هـ(س) على س أولًا ، ثم تطبيق د(س) على الناتج.

• يمكن إيجاد (د ∘ هـ)(س) فقط عندما يكون مدى هـ(س) مجموعة جزئية من مجال د(س).

• ليس من الضروري أن تكون (د ∘ هـ)(س) = (هـ ∘ د)(س) صحيحة لجميع الدوالّ.

الدوالّ العكسيّة

• الدالّة العكسية للدالّة د(س) هي دالّة تلغي ما تقوم به الدالّة د(س).

• (د ∘ د$^{-1}$)(س) = (د$^{-1}$ ∘ د)(س) = س أو إذا كانت ص = د(س) ، فإن س = د$^{-1}$(ص).

• تكتب الدالّة العكسية للدالّة د(س) في صورة د$^{-1}$(س).

• خطوات إيجاد الدالّة العكسية هي:

الخطوة ١: استبدال د(س) بالمتغيّر ص.

الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س ، ص.

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س.

• مجال د$^{-١}$(س) هو مدى د(س).

• مدى د$^{-١}$(س) هو مجال د(س).

• توجد الدالّة العكسية د$^{-١}$(س) إذا كانت الدالّة د(س) واحدًا إلى واحد فقط.

• منحنى د$^{-١}$(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) حول المستقيم ص = س.

• إذا كان د(س) = د$^{-١}$(س) ، فتسمّى الدالّة د(س) عكسية لنفسها.

• إذا كانت الدالّة د عكسية لنفسها ، فإن (د ∘ د)(س) = س.

• يكون منحنى الدالّة العكسية لنفسها متماثلًا حول المستقيم ص = س.

التحويلات الهندسيّة للدوالّ

• منحنى ص = د(س) + ب هو انسحاب لمنحنى ص = د(س) بالمتجه M[٠ ; ب].

• منحنى ص = د(س + أ) هو انسحاب لمنحنى ص = د(س) بالمتجه M[-أ ; ٠].

• منحنى ص = د(س + أ) + ب هو انسحاب لمنحنى ص = د(س) بالمتجه M[-أ ; ب].

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

• منحنى ص = -د(س) هو انعكاس لمنحنى ص = د(س) حول المحور السيني.

• منحنى ص = د(-س) هو انعكاس لمنحنى ص = د(س) حول المحور الصادي.

• منحنى ص = أ د(س) هو تمدّد لمنحنى ص = د(س) معامله (أ) وموازٍ للمحور الصادي.

• منحنى ص = د(أ س) هو تمدّد لمنحنى ص = د(س) معامله $\frac{1}{أ}$ وموازٍ للمحور السيني.

تركيب التحويلات الهندسيّة

• عند تركيب تحويلَين هندسيَّين رأسيَّين أو تحويلَين أفقيَّين ، فإن ترتيب إجرائهما قد يؤثّر على الناتج.

• عند تركيب تحويلَين هندسيَّين أحدهما أفقي والآخر رأسي ، فإن ترتيب إجرائهما لا يؤثّر على الناتج.

• تتبع التحويلات الهندسيّة الرأسية ترتيب العمليات الحسابيّة نفسه.

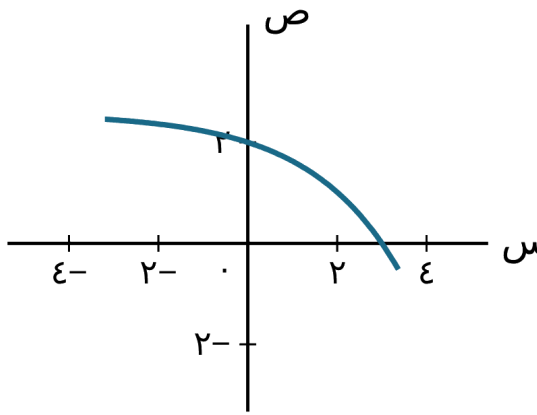
• تتبع التحويلات الهندسيّة الأفقية معكوس ترتيب العمليات الحسابيّة.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية

١) إذا علمت أن الدالّتَين د(س) ، هـ(س) معرّفتان على س ∈ ع كما يأتي: د : س ← ٣س - ١ ، هـ : س ← ٥س - س^{٢}. فاكتب (هـ ∘ د)(س) في صورة أ - ب(س - جـ)^{٢} ، حيث أ ، ب ، جـ ثوابت.

٢) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = د(س).



أ) ارسم منحنى ص = -د($\frac{١}{٢}$س).

ب) أوجد تحويلَين هندسيَّين يحوّلان منحنى ص = د(س) إلى ص = د(٣ - س).

٣) منحنى معادلته ص = س^{٢} + ٦س + ٨.

أ) ارسم المنحنى ، واكتب إحداثيات نقاط التقاطع مع المحورَين.

ب) تمّ سحب المنحنى بالمتجه M[٢ ; ٠] ، ثم أُتبع بتمدّد رأسي معامله ٣. أوجد معادلة المنحنى الناتج في صورة ص = أس^{٢} + ب س.

٤) الدالّة د : س ← س^{٢} - ٤ معرّفة على المجال س ≥ ٠.

أ) أوجد د$^{-١}$(س) ، وحدّد مجال الدالّة د$^{-١}$(س).

ب) ارسم منحنى د(س) ومنحنى د$^{-١}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه.

٥) ★ أ) اكتب -س^{٢} + ٦س - ٥ في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ ، حيث أ ، ب ، جـ ثوابت.

الدالّة د : س ← -س^{٢} + ٦س - ٥ معرّفة على س ≤ م ، حيث م ثابت.

ب) حدّد أصغر قيمة للثابت م لتصبح الدالّة د(س) دالّة واحد إلى واحد.

جـ) عندما م = ٥ ، أوجد د$^{-١}$(س) ، وحدّد مجال د$^{-١}$(س).

٦) ★ الدالّة د : س ← س^{٢} - ٤س + ك معرّفة على س ≤ ل ، حيث ل ، ك ثابتان.

أ) اكتب د(س) في صورة (س + أ)^{٢} + ب + ك ، حيث أ ، ب ثابتان.

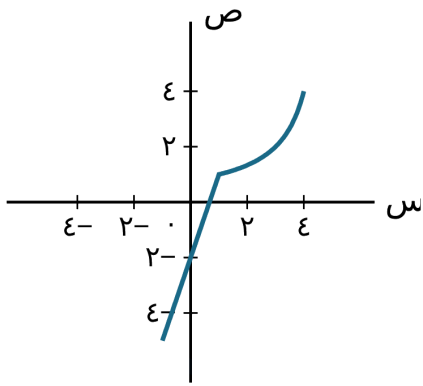
ب) حدّد مدى الدالّة بدلالة ك.

جـ) حدّد أصغر قيمة للثابت (ل) لتصبح د(س) دالّة واحد إلى واحد.

د) لقيمة (ل) التي أوجدتها في الجزئية (جـ) ، أوجد د$^{-١}$(س) ، وحدّد مجال د$^{-١}$(س) بدلالة ك.

٧) ★ يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة د(س) ، حيث
ا- ≥ س ≥ ٤

$$د(س) = \begin{cases} ٣س - ٢ ، ا- \geq س \geq ا \\ \dfrac{٤}{(٥ - س)} ، ا < س \leq ٤ \end{cases}$$



أ) حدّد مدى الدالّة د(س).

ب) انسخ الشكل ، وارسم عليه منحنى ص = د$^{-1}$(س).

جـ) اكتب د$^{-1}$ ، واكتب مجالها.

٨) ★ إذا علمت أنّ الدالّة د(س) = ٤س^{٢} - ٢٤س + ١١ معرّفة على س ∋ ع.

أ) اكتب د(س) في صورة أ(س - ب)^{٢} + جـ ، محدّدًا إحداثيات رأس المنحنى ص = د(س).

ب) الدالّة هـ(س) = ٤س^{٢} - ٢٤س + ١١ معرّفة على س ≥ ١ ، حدّد مدى الدالّة هـ(س).

جـ) أوجد هـ$^{-1}$(س) وحدّد مجالها.

٩) ★

أ) اكتب ٢س^{٢} - ١٢س + ١٣ في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ ، حيث أ ، ب ، جـ ثوابت.

ب) الدالّة د(س) = ٢س^{٢} - ١٢س + ١٣ معرّفة لكل س ≤ ك ، حيث ك ثابت. إذا علمت أنّ د(س) دالّة واحد إلى واحد ، فأوجد أصغر قيمة ممكنة للثابت ك.

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي عندما ك = ٧ :

جـ) مدى الدالّة د(س).

د) د$^{-١}$(س) ، وحدّد مجالها.

١٠) ★ إذا كانت الدالّة د(س) = س^{٢} - ٢س - ١٥ معرّفة على ل ≤ س ≤ ك ، حيث ل ، ك ثابتان موجبان ، ومداها د هو جـ ≤ د(س) ≤ حـ ، حيث جـ ، حـ ثابتان.

أ) اكتب الدالّة د(س) في صورة (س + أ)^{٢} + ب.

ب) حدّد أصغر قيمة للثابت جـ.

جـ) إذا علمت أنّ جـ = ٩ ، حـ = ٦٥ :

١) أوجد قيمة كلٍّ من ل ، ك.

٢) أوجد د$^{-١}$(س).

١١) ★ إذا كانت الدالّة د : س ← س^{٢} + ٤س - ٥ معرّفة على س ∋ ع.

أ) اكتب د(س) في صورة أ(س - ب)^{٢} - جـ.

ب) حدّد مدى د(س).

جـ) أوجد مجموعة قيم س ، حيث د(س) < ١٦.

د) الدالّة هـ : س ← ٢س + ك معرّفة على س ∋ ع. أوجد قيمة الثابت ك بحيث يكون للمعادلة (هـ ∘ د)(س) = ٠ جذران موجبان.

١٢) ★ إذا علمت أنّ الدالّتَين د(س) ، هـ(س) معرّفتان على س ∋ ع كالآتي:

د : س ← ٢س + ١

هـ : س ← س^{٢} - ٢

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

أ) أوجد عبارة كلٍّ من الدالّتَين (د ∘ هـ)(س) ، (هـ ∘ د)(س) ، وبسّط الناتجَين.

ب) أوجد قيمة أ ، حيث (د ∘ هـ)(أ) = (هـ ∘ د)(أ).

جـ) أوجد قيم ب (ب ≠ أ) ، حيث هـ(ب) = ب.

د) أوجد (د$^{-١}$ ∘ هـ)(س) وبسّطها.

هـ) إذا كانت الدالّة ع : س ← س^{٢} - ٢ معرّفة ، حيث س ≥ ٠ ، فأوجد ع$^{-١}$(س).

١٣) ★ إذا علمت أنّ الدالّتَين د(س) ، هـ(س) معرّفتان على النحو:

د : س ← ٢س^{٢} - ٨س + ١٠ ، حيث ٠ ≤ س ≤ ٢

هـ : س ← س ، حيث ٠ ≤ س ≤ ١٠

أ) اكتب د(س) في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ ، حيث أ ، ب ، جـ ثوابت.

ب) حدّد مدى الدالّة د(س).

جـ) حدّد مجال الدالّة د$^{-١}$(س).

د) ارسم في المستوى الإحداثي نفسه المنحنيات ص = د(س) ، ص = هـ(س) ، ص = د$^{-١}$(س) ، موضّحًا العلاقة بين المنحنيات.

هـ) أوجد د$^{-١}$(س).

١٤) إذا كانت د(س) = ٢س^{٢} + ٤س - ٨ ، حيث س ∋ ع ، حيث س ≤ ك.

أ) اكتب ٢س^{٢} + ٤س - ٨ في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ.

ب) أوجد أصغر قيمة للعدد ك بحيث تكون الدالّة واحدًا إلى واحد.

١٥) إذا كانت د(س) = س^{٢} - ٢س + ٤ ، حيث س ∋ ع.

أ) أوجد قيم س عندما د(س) ≤ ٧.

ب) اكتب س^{٢} - ٢س + ٤ في صورة (س - أ)^{٢} + ب.

جـ) حدّد مدى الدالّة د(س).

إجابات مراجعة الوحدة ٢

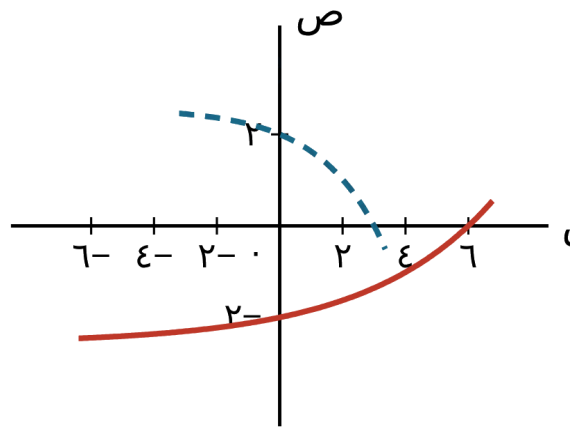
ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمّن مفتاح إجابات.

١) (هـ ∘ د)(س) = ٥(٣س - ١) - (٣س - ١)^{٢} = -٩س^{٢} + ٢١س - ٦

$= \frac{٢٥}{٤} - ٩(س - \frac{٧}{٦})^{٢}$

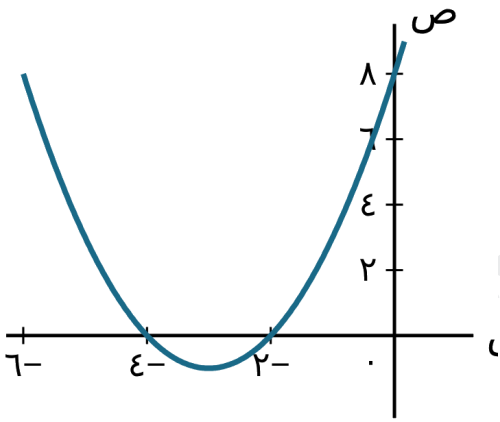
أ = $\frac{٢٥}{٤}$ ، ب = ٩ ، جـ = $\frac{٧}{٦}$

٢) (أ): انعكاس حول المحور السيني ، وتمدّد بمعامل ٢ بالتوازي مع المحور السيني. النقطتان (٠ ، ٢) و(٣ ، ٠) تنتقلان إلى (٠ ، -٢) و(٦ ، ٠).



(ب): ص = د(٣ - س) = د(-(س - ٣)). الطريقة ١: انعكاس حول المحور الصادي ، ثم انسحاب بالمتجه M[٣ ; ٠]. الطريقة ٢: انسحاب بالمتجه M[-٣ ; ٠] ، ثم انعكاس حول المحور الصادي.

٣) (أ): ص = (س + ٣)^{٢} - ١ ، الرأس (-٣ ، -١). التقاطع مع المحور السيني: (-٤ ، ٠) ، (-٢ ، ٠). مع المحور الصادي: (٠ ، ٨).



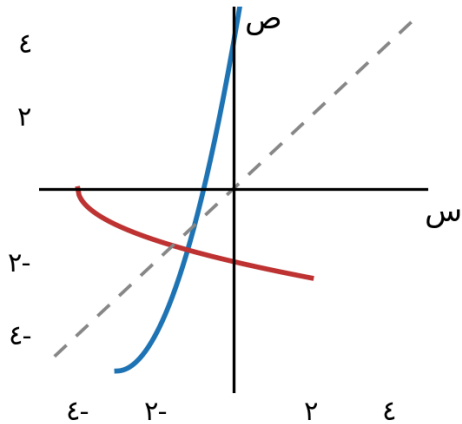
(ب): بعد الانسحاب:

ص = (س - ٢)^{٢} + ٦(س - ٢) + ٨ = س^{٢} + ٢س. بعد التمدّد:

ص = ٣س^{٢} + ٦س. إذن أ = ٣ ، ب = ٦.

٤) (أ): ص = س^{٢} - ٤ ← س = -$\sqrt{\text{ص + ٤}}$ (س ≥ ٠ فنأخذ الجذر السالب). د$^{-١}$(س) = -$\sqrt{\text{س + ٤}}$ ، مجالها: س ≤ ٤-.

(ب): المنحنيان متماثلان حول المستقيم ص = س (المتقطّع).



٥) (أ): $-س^{٢} + ٦س - ٥ = -(س - ٣)^{٢} + ٤$ ، أي أ = -١ ، ب = -٣ ، جـ = ٤.

(ب): الرأس عند س = ٣ ، والدالّة تتناقص بعد الرأس. لتكون واحدًا إلى واحد على س ≤ م يجب م ≤ ٣ ، فأصغر قيمة م = ٣.

(جـ): م = ٥ : د(٥) = ٠ ، فالمدى د(س) ≥ ٠.

$ص = -(س - ٣)^{٢} + ٤ \leftarrow (س - ٣)^{٢} = ٤ - ص \leftarrow س = ٣ + \sqrt{٤ - ص}$ (لأن س ≤ ٥ > ٣).

$د^{-١}(س) = ٣ + \sqrt{٤ - س}$ ، مجالها: س ≥ ٠.

٦) (أ): $س^{٢} - ٤س + ك = (س - ٢)^{٢} - ٤ + ك$ ، أي أ = ٢- ، ب = ٤-.

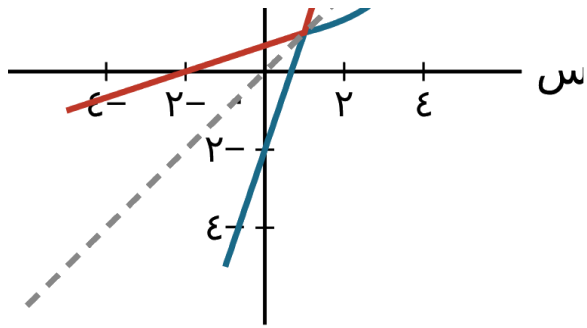
(ب): القيمة الصغرى عند الرأس: د(٢) = ك - ٤. المدى: د(س) ≥ ك - ٤ (على افتراض أن المجال يشمل س = ٢ ، أي ل ≥ ٢).

(جـ): ل = ٢.

(د): ص = (س - ٢)^{٢} + ك - ٤ ← س = ٢ + $\sqrt{\text{ص - ك + ٤}}$.
د$^{-١}$(س) = ٢ + $\sqrt{\text{س - ك + ٤}}$ ، مجالها: س ≤ ك - ٤.

٧) (أ): على الجزء الأول المدى من ٥- إلى ١ ، وعلى الجزء الثاني من ١ (غير مشمولة) إلى ٤. المدى: ٥- ≥ د(س) ≥ ٤.

(ب): ينعكس المنحنى حول المستقيم ص = س.



(جـ): د$^{-١}$(س) = $\frac{\text{(س + ٢)}}{٣}$ للمجال ٥- ≥ س ≥ ١ و

د$^{-١}$(س) = ٥ - $\frac{٤}{\text{س}}$ للمجال ١ < س ≥ ٤. مجال د$^{-١}$: ٥- ≥ س ≥ ٤.

٨) (أ): ٤س^{٢} - ٢٤س + ١١ = ٤(س - ٣)^{٢} - ٢٥ ، أ = ٤ ، ب = ٣ ، جـ = ٢٥-. الرأس (٣ ، ٢٥-).

(ب): على س ≥ ١ الدالّة متناقصة ، هـ(١) = ٤ - ٢٤ + ١١ = ٩-.
المدى: هـ(س) ≤ ٩-.

(جـ): ص = ٤(س - ٣)^{٢} - ٢٥ ← س = ٣ - $\frac{١}{٢}$$\sqrt{\text{ص + ٢٥}}$ (لأن س ≥ ١ < ٣). م$^{-١}$(س) = ٣ - $\frac{١}{٢}$$\sqrt{\text{س + ٢٥}}$ ، مجالها: س ≤ ٩-.

٩) (أ): ٢س^{٢} - ١٢س + ١٣ = ٢(س - ٣)^{٢} - ٥ ، أ = ٢ ، ب = ٣- ، جـ = ٥-.

(ب): ك = ٣ (أصغر قيمة ممكنة).

(جـ): ك = ٧ : د(٧) = ٢(٤)^{٢} - ٥ = ٢٧ ، المدى: د(س) ≤ ٢٧.

(د): س = ٣ + $\sqrt{\frac{\text{(ص + ٥)}}{٢}}$ ، د$^{-١}$(س) = ٣ + $\sqrt{\frac{\text{(س + ٥)}}{٢}}$ ، مجالها: س ≤ ٢٧.

١٠) (أ): س^{٢} - ٢س - ١٥ = (س - ١)^{٢} - ١٦ ، أي أ = ١- ، ب = ١٦-.

(ب): أصغر قيمة للدالّة ١٦- ، فأصغر قيمة للثابت جـ = ١٦-.

(جـ): جـ = ٩ ، حـ = ٦٥. (ا):

د(س) = ٦٥ ← (س - ١)^{٢} = ٨١ ← س = ١٠ (الجذر الموجب).

د(س) = ٩ ← (س - ١)^{٢} = ٢٥ ← س = ٦ (الجذر الموجب). الدالّة تزايديّة لـ س ≤ ١ فيكون ل = ٦ ، ك = ١٠.

(٢): د$^{-١}$(س) = ١ + $\sqrt{\text{س + ١٦}}$ ، مجالها: ٩ ≤ س ≤ ٦٥.

١١) (أ): س^{٢} + ٤س - ٥ = (س + ٢)^{٢} - ٩ ، أ = ١ ، ب = ٢- ، جـ = ٩-.

(ب): المدى: د(س) ≤ ٩-.

(جـ): (س + ٢)^{٢} < ٢٥ ← ٥- < س + ٢ < ٥ ← ٧- < س < ٣.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

(د):
(هـ ∘ د)(س) = ٢(س^{٢} + ٤س - ٥) + ك = ٢س^{٢} + ٨س - ١٠ + ك
، أي س^{٢} + ٤س + $\frac{(ك - ١٠)}{٢}$ = ٠.

⚠ خطأ في الكتاب: مجموع الجذرين = -٤ ، وهو سالب ، فلا يمكن أن يكون الجذران موجبَين لأي قيمة لـ ك. المسألة بصيغتها المطبوعة غير ممكنة. إن كان المقصود جذرَين حقيقيَّين مختلفَين فالشرط ١٦ - ٢(ك - ١٠) > ٠ أي ك < ١٨ ، وإن كان المقصود جذرَين سالبَين فالشرط ١٠ < ك < ١٨.

١٢) (أ): (د ∘ هـ)(س) = ٢(س^{٢} - ٢) + ١ = ٢س^{٢} - ٣.
(هـ ∘ د)(س) = (٢س + ١)^{٢} - ٢ = ٤س^{٢} + ٤س - ١.
(ب):
٢أ^{٢} - ٣ = ٤أ^{٢} + ٤أ - ١ ← ٢أ^{٢} + ٤أ + ٢ = ٠ ← (أ + ١)^{٢} = ٠ ← أ = .
(جـ): ب^{٢} - ٢ = ب ← ب^{٢} - ب - ٢ = ٠ ← ب = ٢ أو ب = -١. وبما أن ب ≠ أ = -١ فإن ب = ٢.

(د): د$^{-١}$(س) = $\frac{(س - ١)}{٢}$ ، فإن (د$^{-١}$ ∘ هـ)(س) = $\frac{(س^{٢} - ٣)}{٢}$.

(هـ): ع(س) = س^{٢} - ٢ ، س ≥ ٠ : س = -$\sqrt{ص + ٢}$ ،
ع$^{-١}$(س) = -$\sqrt{س + ٢}$ ، مجالها س ≤ ٢-.

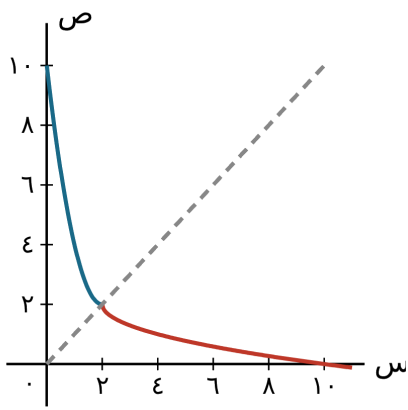
ملاحظة: اتجاه رمز المتباينة في الجزئية (هـ) كما هو مطبوع ، قُرئ س ≥ ٠. ولو كان المقصود س ≤ ٠ لكانت ع$^{-١}$(س) = $\sqrt{س + ٢}$.

١٣) (أ): ٢س^{٢} - ٨س + ١٠ = ٢(س - ٢)^{٢} + ٢ ، أ = ٢ ، ب = -٢ ، جـ = ٢.

(ب): د(٠) = ١٠ ، د(٢) = ٢ ، والدالّة متناقصة على هذا المجال.
المدى: ٢ ≤ د(س) ≤ ١٠.

(جـ): مجال د$^{-١}$(س) هو مدى د(س): ٢ ≤ س ≤ ١٠.

(د): هـ(س) = س هو المستقيم ص = س ، والمنحنيان ص = د(س) ، ص = د$^{-١}$(س) متماثلان حول هذا المستقيم.



(هـ): ص = ٢(س - ٢)^{٢} + ٢ ← س = ٢ - $\sqrt{\frac{(ص - ٢)}{٢}}$ (لأن س ≥ ٢). د$^{-١}$(س) = ٢ - $\sqrt{\frac{(س - ٢)}{٢}}$.

١٤) (أ): ٢س^{٢} + ٤س - ٨ = ٢(س + ١)^{٢} - ١٠ ، أ = ٢ ، ب = ١ ، جـ = -١٠.

(ب): رأس المنحنى عند س = −١ ، فلتكون الدالّة واحدًا إلى واحد على س ≤ ك يجب ك ≤ −١. أصغر قيمة ك = −١.

١٥) (أ):

س^{٢} − ٢س + ٤ ≤ ٧ ← س^{٢} − ٢س − ٣ ≤ ٠ ← (س − ٣)(س + ١) ≤ ٠

أو س ≤ ٣.

ملاحظة: رمز المتباينة في السؤال مطبوع باتجاه قُرئ ٧ ≥ د(س) أي د(س) ≤ ٧ (مثل بقية الأسئلة في الصفحة). ولو كان المقصود د(س) ≥ ٧ فالحل −١ ≥ س ≥ ٣.

(ب): س^{٢} − ٢س + ٤ = (س − ١)^{٢} + ٣ ، أ = ١ ، ب = ٣.

(جـ): المدى: د(س) ≤ ٣.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh