٦-١ المصفوفات والعمليات عليها

المصفوفة جدول مستطيل من الأعداد في صفوف وأعمدة. رتبة المصفوفة م × ن: م صفوف و ن أعمدة. العنصر $أ_{ij}$ في الصف i والعمود j.

ملاحظة: الكتاب يكتب المصفوفات بالاتجاه العربي: الصف يُقرأ من اليمين إلى اليسار (أول عنصر في الصف على اليمين). المذكرة تتبع الكتاب. وصف العنصر $أ_{ij}$ في مقدمة الدرس يبدو معكوسًا بسبب هذا الاتجاه، فالتزم بالقاعدة: $أ_{ij}$ الصف i ثم العمود j.

• **تساوي مصفوفتين:** نفس الرتبة وكل عنصر يساوي نظيره. • **الجمع والطرح:** للمصفوفتين من نفس الرتبة فقط، عنصرًا بعنصر. • **الضرب في عدد:** نضرب كل عنصر في العدد.

• **ضرب مصفوفتين:** ا × ب ممكن فقط إذا كان عدد أعمدة ا = عدد صفوف ب. إذا كانت رتبة ا م × ن ورتبة ب ن × ك فرتبة الناتج م × ك. عنصر الصف i والعمود j في الناتج = حاصل ضرب الصف i من ا في العمود j من ب (الأول في الأول + الثاني في الثاني + ...).

• ا × ب ≠ ب × ا عمومًا. • (ا × ب) × ج = ا × (ب × ج). • المصفوفة المحايدة م: أحاد على القطر الرئيسي وأصفار في الباقي، ا × م = م × ا = ا.

مثال ٢

$أ = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٨ & ٧ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$

$أ \times ب = \begin{pmatrix} ٥٠ & ٤٣ \\ ٢٢ & ١٩ \end{pmatrix}$

$ب \times أ = \begin{pmatrix} ٤٦ & ٣١ \\ ٣٤ & ٢٣ \end{pmatrix}$

تمارين ١-٦

١) $أ = \begin{pmatrix} ٥ & ٧ & ٣- & ٠ \\ ٢- & ٨ & ١١ & ٦ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٤ & ٦ & ٢ \\ ٦- & ٢ & ٥٢ \\ ٦ & ٨ & ٧٢ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٧ \\ ١٢- \\ ٤ \end{pmatrix}$.

أوجد: (أ) رتبة كل مصفوفة. (ب) قيم $أ_{٣٢}$ ، $ب_{٢١}$ ، $ج_{١٢}$. (ج) ٤-ج ، ٢-أ ، $\frac{١}{٢}$ب.

٢) أوجد ناتج الضرب إن أمكن: (أ) أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٤ \end{pmatrix}$ ، أ × ب

(ب) $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٦ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢- & ١٠ \end{pmatrix}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

(ج) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & ٠ \\ ٣ & ٨ \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} ٢ & ٧ & ٥ & -١ \\ ٤ & -٤ & ٠ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١٢ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

٣) أوجد المجاهيل:

(أ) $\begin{bmatrix} ٥ & -٦ \\ س+١٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص٢+٥ & ٥ \\ ١٤ & ٤ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ٦ & \frac{٢}{٣}س \\ -٤ & ص+١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س+٣ & ٦ \\ ص+٥ & -٤\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

٤) $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ -٩ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ١٢ & ٤ \end{bmatrix}$ حيث $أ \times ب \neq ب \times أ$. تحقق من ذلك.

٥) $أ = \begin{bmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$. أوجد: (أ) $أ^{٢} + ١٢ \times ب$ (ب) $ب^{٢} \times أ$ (ج) $أ^{٢} - ب \times أ$

٦) $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ & ١ \\ ٦ & ١ & ٠ \\ -٢ & ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$. أوجد: (أ) $ب^{٢} \times أ$ (ب) $أ^{٢} - أ \times ب$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٧) أ = $\begin{pmatrix} -١ & -٥ & ١٠ \\ ٠ & ٩ & ٣ \\ ١ & ٢ & -٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٤ \\ ٥ & -٣ & -٦ \end{pmatrix}$. أوجد: (أ) ٢أ + ٥ب (ب) ب^{٢} × أ (ج) أ^{٢} × ب (د) ٢أ + ٣أ^{٢}

ورقة الإجابات النموذجية: تمارين ١-٦

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات. المصفوفات في الكتاب مكتوبة بالاتجاه العربي: الصف يُقرأ من اليمين إلى اليسار، وكذلك في هذه المذكرة.

١) (أ) أ: ٢ × ٤ ، ب: ٣ × ٣ ، ج: ٣ × ١. (ب) أ$_{٣٢}$ = ١١ ، ب$_{٢١}$ = ٦ ، ج$_{١٢}$ = -١٢. (ج) ٤-ج = $\begin{pmatrix} -٢٨ \\ ٤٨ \\ -١٦ \end{pmatrix}$ ، ٢-أ = $\begin{pmatrix} -١٠ & -١٤ & ٦ & ٠ \\ ٤ & -١٦ & -٢٢ & -١٢ \end{pmatrix}$ ،

$\frac{١}{٢}$ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ -٣ & ١ & ٢٦ \\ ٣ & ٤ & ٣٦ \end{pmatrix}$

٢) (أ) $\begin{pmatrix} ١٢ \\ ٢٠ \end{pmatrix}$ (ب) غير ممكن: عدد أعمدة المصفوفة الأولى (١) لا يساوي عدد صفوف الثانية (٢). (ج) $\begin{pmatrix} ٢١ & ٣٨ \end{pmatrix}$ (د) غير ممكن: الأولى ٢ × ٤ والثانية ٢ × ٢.

٣) (أ) س + ٢ا = ١٤ ← س = ٢ ، ٢ص + ٥ = -٦ ← ص = $-\frac{١١}{٢}$.

(ب) $\frac{٢}{٣}$س = س + ٣ ← س = -٩ ، ص + ١ = $\frac{١}{٢}$ص + ٥ ← ص = ٨.

٤) ا × ب = $\begin{bmatrix} ٧٤ & ٣٤ \\ ٩٣ & ١١- \end{bmatrix}$ ، ب × ا = $\begin{bmatrix} ١ & ٥١ \\ ٧٦ & ١٠٠- \end{bmatrix}$ ، النتيجتان مختلفتان فـ ا × ب ≠ ب × ا.

٥) (أ) $\begin{bmatrix} ٨١ & ٠ \\ ١٦ & ٥- \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٢٤ & ٢٨ \\ ٤ & ١٨ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٣١ & ٤٢ \\ ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$

ملاحظة: ترتيب الضرب في ٥ و٦ و٧ يُقرأ بالاتجاه العربي (من اليمين). عند الشك راجع الصورة في الكتاب ص ١٧٢.

٦) (أ) $\begin{bmatrix} ١٢ & ٠ & ٨- \\ ١٣٢ & ١٦ & ٢٤- \\ ١٢ & ١٥- & ١٦- \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٦ & ٩ & ٢٥- \\ ٢- & ٢١- & ١٢ \\ ٨ & ٩- & ٣- \end{bmatrix}$

٧) (أ) $\begin{bmatrix} ٢٧ & ١١- & ٤٠- \\ ٢٦ & ١٨ & ٠ \\ ١٣ & ٥- & ١٠ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ١١ & ١٠٦ & ٣٣- \\ ٤٤- & ٢٥٦- & ٢٨٤ \\ ٢٩ & ٣١٠ & ١٥١- \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} ١٨٧ & ١٢٩- & ٢٢٢- \\ ٦٩ & ٣٣- & ٢٧٠ \\ ٣٤٢- & ٢٣٦ & ٣٤٨ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ١٦- & ١٣ & ١١٣ \\ ٩ & ٢٧٩ & ٤٢ \\ ٣١ & ٧٠- & ٢٠٥- \end{bmatrix}$

٦-٢ محدد المصفوفة

• محدد مصفوفة ٢ × ٢ |أ| = $\begin{vmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{vmatrix}$ هو |أ| = أ د − ب ج.

• محدد ٣ × ٣: نفكّ على الصف الأول: |أ| = أ × (محدد الصغرى) − ب × (...) + ج × (...) بإشارات + − +.

• المصفوفة **منفردة** إذا كان محددها ٠، و**غير منفردة** إذا كان محددها ≠ ٠. • |ا × ب| = |ب × ا| = |ا| × |ب|.

مثال

٢ × ٢: ا = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٨ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -١٠ & ٦ \end{bmatrix}$: |ا| = ١١ ، |ب| = ٢٢ ، |ا × ب| = ١١ × ٢٢ = ٢٤٢ ، |ا| × |ب| = ا × ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٣٨ \\ -٥ & ٥٢ \end{bmatrix}$.

٣ × ٣: ا = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ١ & -١٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & -١٠ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$: |ا| = ٨ ، |ب| = −٣ ، ا × ب = $\begin{bmatrix} ٧ & -١٠ & ٤ \\ ١٠ & -١٠ & ٧ \\ ١ & ٢ & -١٠ \end{bmatrix}$ ، |ا × ب| = −٢٤.

تمارين ٦-٢

١) أي المصفوفات الآتية غير منفردة؟ (أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٨ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ -٦ & -١٤ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

٢) أوجد قيم س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١ & س-٣ \end{bmatrix}$ منفردة.

٣) بيّن أن المصفوفة $\begin{bmatrix} س & -٢ \\ ٥ & س+١ \end{bmatrix}$ ليست منفردة لجميع قيم س الحقيقية.

٤) $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٦ & -٣ \end{bmatrix}$. أثبت أن: (أ) $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$ (ب) $|ب أ| = |ب| \times |أ|$

٥) أوجد محدد كل مصفوفة: (أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٣ & ٥ \\ ٣ & ١ & ٤ \\ ٣ & -٥ & ٣ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٧ \\ -٣ & ٠ & -١٣ \\ ٤ & ١١ & ٣٢ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ١ & ٨ & ٦ \\ ٠ & -٨ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ١٢ \end{bmatrix}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٦) إذا كان $\begin{bmatrix} أ & أ & أ٢ \\ أ٣ & -أ & ٠ \\ أ٤ & أ٢ & أ \end{bmatrix}$ محدده = ٢ فأوجد قيمة أ.

٧) ا = $\begin{bmatrix} ١ & ٥ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ١ & -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$. أوجد |ا × ب|.

ورقة الإجابات النموذجية: تمارين ٦-٢

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات. المصفوفات في الكتاب مكتوبة بالاتجاه العربي: الصف يُقرأ من اليمين إلى اليسار، وكذلك في هذه المذكرة.

١) (أ) |ا| = ٥ × ٢ − ٨ × ٤ = −٢٢ ، (ب) |ب| = ٣ × (−١٤) − ٧ × (−٦) = ٠، (ج) |ج| = ١ × ٠ − ٤ × (−١) = ٤. المنفردة (ب) فقط؛ غير المنفردتين: (أ) و(ج).

٢) س(س − ٣) − ٤ × ١ = ٠ ← س^{٢} − ٣س − ٤ = ٠ ← (س − ٤)(س + ١) = ٠ ← **س = ٤** أو **س = −١**

٣) المحدد = س(س + ١) + ١٠ = س^{٢} + س + ١٠. المميز = ١ − ٤٠ = −٣٩ < ٠، فلا يساوي المحدد صفرًا لأي س حقيقية.

٤) |ا| = ١٥ − ٤ = ١١ ، |ب| = ٣ − ١٢ = −٩ ، ا × ب = $\begin{pmatrix} ٢١ & -٦ \\ ٢٩ & -١٣ \end{pmatrix}$ ، ا × |ب| = −٩٩ = ١١ × (−٩). ب × ا = $\begin{pmatrix} -١٠ & ٦ \\ ١٥ & ٩ \end{pmatrix}$ ، |ب × ا| = |ا| = −٩٩ = −٩ × ١١.

٥) (أ) −١٢ (ب) ٠ (ج) −٩٦

٦) المحدد = أ(−أ² − ٠) − أ(٣أ² − ٠) + ٢أ(٦أ² + ٤أ²) = ١٦أ³ = ٢ ← أ³ = $\frac{١}{٨}$ ← **أ = $\frac{١}{٢}$**

٧) |ا| = −١٠ ، |ب| = −٣ ← |ا × ب| = ٣٠

٦-٣ معكوس المصفوفة

معكوس المصفوفة المربعة ا هو المصفوفة ا$^{-١}$ التي تحقق ا × ا$^{-١}$ = ا$^{-١}$ × ا = م. لا يوجد معكوس إلا للمصفوفة غير المنفردة (محددها ≠ ٠).

٢ × ٢: إذا كانت ا = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$ فإن ا$^{-١}$ = $\frac{١}{أ د - ب ج}$ $\begin{pmatrix} د & -ب \\ -ج & أ \end{pmatrix}$

٣ × ٣: نكتب المصفوفة المعززة [ا | م] ونستخدم عمليات الصف حتى تصبح [م | ا$^{-١}$]. عمليات الصف: تبديل صفين، ضرب صف في عدد ≠ ٠، إضافة مضاعف صف إلى صف آخر. وإذا ظهر صف أصفار في الجزء الأيمن (المصفوفة الأصلية) فهي منفردة.

• حل المعادلة ا س = ب: س = ا$^{-١}$ ب. • (ا × ب)$^{-١}$ = ب$^{-١}$ × ا$^{-١}$ (الترتيب يتبدّل). • لحل ا × ج × ب = م نضرب بـ ا$^{-١}$ من جهة وبـ ب$^{-١}$ من الجهة الأخرى: ج = ا$^{-١}$ × ب$^{-١}$.

تمارين ٦-٣

١) أوجد معكوس كل مصفوفة: (أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ -٢ & ٥ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ -٨ & ١٢ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٨ & ١١ \end{pmatrix}$

٢) ا = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ك & ٥ \end{pmatrix}$. (أ) أوجد قيمة ك التي لا يوجد عندها معكوس. (ب) إذا ك = ٨ فأوجد ب حيث ب × ا^{٢} = م.

٣) ا = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$. أوجد ج حيث ا × ج × ب = م.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٤) أوجد معكوس ا = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ٠ & ٤ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$

٥) ا = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$. (أ) أوجد ا^{٢} (ب) بيّن أن ا(ا - ٥م) = ٢م (ج) استخدم (ب) لتبيّن أن ا$^{-١}$ = $-\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$

٦) ا = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix}$. (أ) ا^{٢} ، ا^{٣} (ب) قيمة ك بحيث ا^{٣} - ك ا^{٢} + ٢ا - ٤م = ٠ (ج) ا$^{-١}$

٧) ا = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ -١ & -١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ -١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$. أوجد ج حيث ا × ج × ب = م.

ورقة الإجابات النموذجية: تمارين ٣-٦

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات. المصفوفات في الكتاب مكتوبة بالاتجاه العربي: الصف يُقرأ من اليمين إلى اليسار، وكذلك في هذه المذكرة.

منصة الأستاذ خالد كمال
khaled-math.surge.sh

١) (أ) $|\,| = ٩$ ، $١^{-١} = \begin{pmatrix} -\frac{٥}{٩} & -\frac{٧}{٩} \\ \frac{٢}{٩} & \frac{١}{٩} \end{pmatrix}$

(ب) $|\,| = ٥٢$ ، $١^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{١٣} & -\frac{١}{٢٦} \\ \frac{٢}{١٣} & \frac{٣}{٥٢} \end{pmatrix}$

(ج) $|\,| = -٣١$ ، $١^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{٤}{٣١} & \frac{٥}{٣١} \\ \frac{٣}{٣١} & -\frac{٤}{٣١} \end{pmatrix}$

(د) $|\,| = -٢٤$ ، $١^{-١} = \begin{pmatrix} -\frac{١١}{٢٤} & \frac{١}{٨} \\ \frac{١}{٣} & ٠ \end{pmatrix}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٢) (أ) المحدد = ٢ك - ١٥ = ٠ ← **ك = $\frac{١٥}{٢}$**. (ب) عند ك = ٨: ا =
$\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$ ، |ا| = ١ ، $ا^{٢}$ = $\begin{pmatrix} ١٩ & ٣٠ \\ ٥٠ & ٧٩ \end{pmatrix}$ ، ب = $(ا^{٢})^{-١}$ =
$\begin{pmatrix} ٧٩ & -٣٠ \\ -٥٠ & ١٩ \end{pmatrix}$

٣) |ا| = ١٥ ، |ب| = -١ ← ج = $ا^{-١}$ × $ب^{-١}$ =
$\begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & -\frac{١}{١٥} \\ ٠ & \frac{١}{٥} \end{pmatrix}$ ×
$\begin{pmatrix} -\frac{٨}{١٥} & \frac{٧}{١٥} \\ \frac{٣}{٥} & -\frac{٢}{٥} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$

٤) |ا| = ١٨ ، $ا^{-١}$ =
$\begin{pmatrix} \frac{٧}{١٨} & -\frac{٤}{٩} & \frac{١١}{١٨} \\ \frac{١}{١٨} & \frac{٢}{٩} & -\frac{١}{١٨} \\ -\frac{٢}{٩} & \frac{١}{٩} & \frac{٢}{٩} \end{pmatrix}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٥) (أ) $أ^{٢} = \begin{pmatrix} ٧ & ١٠ \\ ١٥ & ٢٢ \end{pmatrix}$. (ب) $أ - ٥م = \begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ←

$أ(أ - ٥م) = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = ٢م$.

(ج) $أ^{٢} - ١٥أ = ٢م$ ← $أ \times (أ - ٥م) \times \frac{١}{٢} = م$ ← $أ^{-١} = \frac{١}{٢}(أ - ٥م)$

$= \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ \frac{٣}{٢} & -\frac{١}{٢} \end{pmatrix}$ ، وهي نفسها $-\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$.

٦) (أ) $أ^{٢} = \begin{pmatrix} ٤ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $أ^{٣} = \begin{pmatrix} ٨ & ٦ & ٥ \\ ١٦ & ٨ & ٨ \\ ٨ & ٤ & ٦ \end{pmatrix}$. (ب) **ك = ٣**

(تحقّق: المعادلة تعطي المصفوفة الصفرية).

(ج) $|أ| = ٤$ ، $أ^{-١} = \begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} & -\frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & \frac{١}{٤} & -\frac{٣}{٤} \\ -\frac{١}{٢} & -\frac{١}{٤} & \frac{١}{٤} \end{pmatrix}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٧) |ا| = ٥ ، |ب| = ٤ ، ج = ا$^{-١}$ × ب$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} \frac{٢}{٥} & -\frac{٢}{٥} & -\frac{١}{١٠} \\ \frac{٢}{٥} & -\frac{١}{١٠} & -\frac{٣}{٢٠} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} & \frac{٣}{١٠} \end{pmatrix}$

٦-٤ استخدام المصفوفات في حل أنظمة المعادلات

نظام ثلاث معادلات خطية يُكتب ا س = ب حيث ا مصفوفة المعاملات و س مصفوفة المتغيرات و ب مصفوفة الثوابت. نكوّن المصفوفة المعززة [ا | ب] ونطبق عمليات الصف حتى نصل إلى صيغة أيشلون.

• **حل وحيد:** يظهر في الجزء الأيسر المبسّط صف لكل متغير (ثلاثة أصفار غير صفرية قطريًا). • **لا يوجد حل:** يظهر صف على الصورة ٠ ٠ ٠ | عدد ≠ ٠ (مثل ٠ = -١). • **عدد لا نهائي من الحلول:** يظهر صف أصفار كامل ٠ ٠ ٠ | ٠، فيبقى أقل من ثلاث معادلات مستقلة ونعبّر عن المتغيرات بدلالة متغير حر.

هندسيًا: المعادلات الثلاث ثلاثة مستويات. الحل الوحيد نقطة تقاطعها، وعدد الحلول اللانهائي يعني تقاطعها في مستقيم، ولا حل يعني أنها لا تتقاطع معًا.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٦-٤

١) حدّد إن كان لكل نظام حل وحيد ثم أوجده: (أ) ٣س - ص = ٦ ، ٦-س + ٢ص = -١٣

(ب) ٢س + ص = ٤ ، ٣س - ص = ٧

(ج) ٥س - ٤ص = ٢ ، ١٠س - ٨ص = ٤

٢) ا = $\begin{bmatrix} ٢ & ج \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ \\ د \end{bmatrix}$ ، ا س = ب. أوجد قيمتي ج ، د عندما: (أ) لا يوجد حل (ب) يوجد عدد لا نهائي من الحلول (ج) يوجد حل وحيد.

٣) حدّد نوع الحل ثم أوجده: (أ) س + ٤ص - ٢ع = ٢ ، ٢-س - ١٠ص - ٦ع = ٣ ، ٣س + ١٤ص + ٤ع = ٧

(ب) ٢س + ص + ع = ١ ، ٢س + ٣ص + ١٠ع = ٣ ، ٤س - ع = ١

(ج) س + ٥ص - ع = ١ ، ٢س + ٧ص - ٤ع = ٠ ، ٤س + ١١ص - ١٠ع = ٢-

٤) في النظام س - ص = ١ ، ٢س - ص + ٥ع = ٤ ، س + ٢ص + ١٥ع = ك: أوجد ك ليكون عدد الحلول لا نهائيًّا.

٥) أوجد نقطة تقاطع المستويات: س - ٤ص + ٤ع = ٣ ، س - ٧ص + ١١ع = ٤ ، ٢س - ٥ص + ٣ع = ٥

٦) أوجد نقطة تقاطع المستويات: س - ٦ص = ٢ ، ٢س + ٤ص - ١٧ع = ٤ ، ٣س + ١٢ص - ٣٣ع = ٦

٧) للنظام س + ص + ٣ع = ١ ، س - ٢ص + ٢ع = -١ ، ٣س + ٦ص + ل ع = ك: حدّد عدد الحلول عندما: (أ) ل = ٥ ، ك = ٥ (ب) ل = ١٠ ، ك = ١٠ (ج) ل = ١٠ ، ك = ٥

ورقة الإجابات النموذجية: تمارين ٤-٦

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات. المصفوفات في الكتاب مكتوبة بالاتجاه العربي: الصف يُقرأ من اليمين إلى اليسار، وكذلك في هذه المذكرة.

١) (أ) نضرب الأولى في ٢: ٦س - ٢ص = ١٢ ثم نجمع مع الثانية فنحصل ٠ = -١: **لا يوجد حل**. (ب) بالجمع ٥س = ١١ ← س = $\frac{١١}{٥}$ ، ص = $-\frac{٢}{٥}$: **حل وحيد**. (ج) المعادلة الثانية ضعف الأولى: **عدد لا نهائي من الحلول** ، ص = $\frac{٥س - ٢}{٤}$.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٢) المحدد = -٤ - ٣ج. (أ) -٤ - ٣ج = ٠ ← **ج = $-\frac{٤}{٣}$** ، والمعادلة الثانية ٣س - ٢ص = د لا تتفق مع الأولى ($\frac{٣}{٢}$ × الأولى ٣س - ٢ص = $\frac{٩}{٢}$) ← **د ≠ $\frac{٩}{٢}$**. (ب) **ج = $-\frac{٤}{٣}$** ، **د = $\frac{٩}{٢}$**. (ج) **ج ≠ $-\frac{٤}{٣}$** وأي قيمة لـ د.

٣) (أ) بالاختزال يظهر الصف ٠٠٠ | ٨: **لا يوجد حل**. (ب) **حل وحيد:** س = $\frac{٧}{٢٤}$ ، ص = $\frac{١}{٤}$ ، ع = $\frac{١}{٦}$. (ج) يظهر صف أصفار كامل: **عدد لا نهائي من الحلول:** ع = ه (حر) ، س = $\frac{-٧ + ١٣ه}{٣}$ ، ص = $\frac{٢ - ٢ه}{٣}$.

ملاحظة: في ٣(ج) رمز المتغير الحر ه اختيار مني.

٤) ص + ٥ع = ٢ ، ثم المعادلة الثالثة - الأولى: ٣ص + ١٥ع = ك - ١ ← ٦ = ك - ١ ← **ك = ٧**.

٥) ($\frac{٥}{٣}$ ، $-\frac{١}{٣}$ ، ٠)

٦) (٢ ، ٠ ، ٠)

٧) (أ) ل = ٥ ، ك = ٥: **حل وحيد** $(\frac{١}{٣}\ ،\ \frac{٢}{٣}\ ،\ ٠)$. (ب) ل = ١٠ ، ك = ١٠: يظهر ٠ = ٥ ← **لا يوجد حل**. (ج) ل = ١٠ ، ك = ٥: صف أصفار كامل ← **عدد لا نهائي من الحلول**.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) إذا علمت أن ا = $\begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix}$ ، فأوجد: (أ) ج حيث ج × ب = ا + ا^{٢} (ب) د حيث ا × د × ب = م (م المصفوفة المحايدة)

٢) ا = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & أ \\ ٠ & ٢ & -٣أ \\ ١ & ٠ & ٤+أ \end{bmatrix}$. (أ) أوجد قيمة أ إذا كانت المصفوفة منفردة. (ب) أوجد ا$^{-١}$ عندما أ = ٤.

٣) حدّد إن كانت كل مصفوفة منفردة أم لا: (أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٨ & ٧ \\ ١ & ١٠ & ١١ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ -١ & -٢ & ٠ \\ ٣ & ٦ & ٦ \end{bmatrix}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٤) إذا كانت $\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ \sqrt{م+١} & ٢ن \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ - س \\ ٥ & ن^{٢}+١ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كلٍّ من: س ، ن ، م.

ورقة الإجابات النموذجية: مراجعة الوحدة ٦

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات. المصفوفات في الكتاب مكتوبة بالاتجاه العربي: الصف يُقرأ من اليمين إلى اليسار، وكذلك في هذه المذكرة.

ا) $أ^{٢} = \begin{bmatrix} ٤٦ & ٤٥ \\ ١٨ & ١٩ \end{bmatrix}$ ، $أ + أ^{٢} = \begin{bmatrix} ٥٢ & ٥٠ \\ ٢٢ & ٢٠ \end{bmatrix}$ ، $|ب| = ٢$ ، $ب^{-١} = \begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ -\frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$.

(أ) $ج = (أ + أ^{٢})ب^{-١} = \begin{bmatrix} -١٢٩ & -٧٧ \\ -٥١ & -٣١ \end{bmatrix}$.

(ب) $|أ| = ٨$ ، $|أ^{-١}| = \frac{١}{٨}$ ، $د = أ^{-١} \times ب^{-١}$ ← $م = ب \times د \times أ$

$$د = أ^{-١} \times ب^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٨} & -\frac{٥}{٨} \\ -\frac{١}{٤} & \frac{٣}{٤} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} -\frac{٧}{١٦} & \frac{١}{١٦} \\ \frac{١}{٨} & -\frac{١}{٨} \end{bmatrix}$$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٢) (أ) |أ| = ٢أ + ٢ = ٠ ← **أ = -١**. (ب) عند أ = ٤: |أ| = ١٠ ، $أ^{-١}$ =

$$\begin{pmatrix} \frac{٨}{٥} & -\frac{٨}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{١}{١٠} & \frac{٢}{٥} & -\frac{١}{١٠} \\ -\frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{pmatrix}$$

٣) (أ) المحدد = ٢٤ ≠ ٠ ← غير منفردة. (ب) المحدد = ٠ ← منفردة (العمود الثاني = ضعف العمود الأول).

٤) بالمساواة: ٢ - س = -٣ ← **س = ٥**. $\sqrt{م+١}$ = ٥ ←
م + ١ = ٢٥ ← **م = ٢٤**. ٢ن = $ن^{٢}$ + ١ ← $(ن - ١)^{٢}$ = ٠ ← **ن = ١**.

ملاحظة: قرأت مصفوفات مراجعة الوحدة بالاتجاه العربي (الصف من اليمين إلى اليسار). في ٤ القراءة مدعومة بأن القيم الناتجة أعداد صحيحة (س = ٥ ، م = ٢٤ ، ن = ١). في ١ التحقق: ج × ب = ١ + $١^{٢}$.