١-١ حلّ المعادلات التربيعية بالتحليل إلى عوامل

سبق أن تعلّمت طريقة التحليل إلى عوامل وطريقة الصيغة التربيعية لحلّ المعادلات التربيعية جبريًّا.

مثال ١

حلّ المعادلة $س^{٢} = ٣س + ٢٨$

الحلّ

$س^{٢} = ٣س + ٢٨$

(اكتب المعادلة في صورة $أ\ س^{٢} + ب\ س + جـ = ٠$)

$س^{٢} - ٣س - ٢٨ = ٠$

(حلّل إلى العوامل)

$(س + ٤)(س - ٧) = ٠$

(استخدم الحقيقة: إذا كان ناتج الضرب $ل\ ك = ٠$، فإن $ل = ٠$ أو $ك = ٠$)

$س + ٤ = ٠$ أو $س - ٧ = ٠$

(حلّ)

$\therefore س = -٤$ أو $س = ٧$

استكشف ١

استكشف ١: المعادلة: ٢س^{٢} + ٣س - ٥ = (س - ١)(س - ٢)
المعروض أدناه هو حلّ مُنى للمعادلة السابقة:
حلّلت الطرف الأيمن إلى عوامل:
(س - ١)(٢س + ٥) = (س - ١)(س - ٢)
٢س^{٢} + ٣س - ٥ = س^{٢} - ٣س + ٢
٢س^{٢} - ٣ = ٠
أعادت ترتيب الحدود: س = -٧
ناقش حلّ مُنى مع أقرانك في الصف موضّحًا الخطأ الذي ارتكبته، ثم حلّ المعادلة حلًّا صحيحًا.

مثال ٣

حلّ المعادلة $\frac{٢١}{٢س} - \frac{٢}{س + ٣} = ١$

مساعدة: عند التعامل مع المقادير النسبية، يجب أن يذكر أن المقام لا يمكن أن يكون صفرًا؛ إذًا هنا س ≠ ٠ وس ≠ -٣

الحلّ

$$\frac{٢١}{٢س} - \frac{٢}{س + ٣} = ١$$

(اضرب الطرفين في ٢س(س + ٣))

٢١(س + ٣) - ٤س = ٢س(س + ٣)

(فكّ الأقواس وأعد ترتيب الحدود)

$٢س^{٢}$ - ١١س - ٦٣ = ٠

(حلّل إلى العوامل)

(٢س + ٧)(س - ٩) = ٠

(حلّ)

٢س + ٧ = ٠ أو س - ٩ = ٠

∴ س = $-\frac{٧}{٢}$ أو س = ٩

مثال ٤

حلّ المعادلة $\frac{٣س^{٢} + ٢٦س + ٣٥}{س^{٢} + ٨} = ٠$

الحلّ

$$\frac{٣س^{٢} + ٢٦س + ٣٥}{س^{٢} + ٨} = ٠$$

(اضرب طرفَي المعادلة في $(س^{٢} + ٨)$)

$٣س^{٢} + ٢٦س + ٣٥ = ٠$

(حلّل إلى العوامل)

$(٣س + ٥)(س + ٧) = ٠$

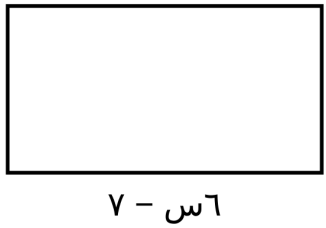
(حلّ)

$٣س + ٥ = ٠$ أو $س + ٧ = ٠$

$\therefore س = -\frac{٥}{٣}$ أو $س = -٧$

مثال ٥

مستطيل بُعداه (س) سم و (٦س - ٧) سم ومساحته ٩٠ سم². أوجد بُعدَي المستطيل.



الحلّ

المساحة = س(٦س - ٧)

(فكّ الأقواس)

٦س^{٢} - ٧س = ٩٠

(اكتب المعادلة)

٦س^{٢} - ٧س - ٩٠ = ٠

(حلّل إلى العوامل)

(٢س - ٩)(٣س + ١٠) = ٠

(حلّ)

٢س - ٩ = ٠ أو ٣س + ١٠ = ٠

س = $\frac{٩}{٢}$ = ٤$\frac{١}{٢}$ أو س = -$\frac{١٠}{٣}$ (مرفوض)

(بما أن بُعدَي المستطيل كمّية موجبة، فإن قيمة س = ٤$\frac{١}{٢}$)

عندما يكون س = ٤$\frac{١}{٢}$ فإن ٦س - ٧ = ٢٠

∴ بُعدا المستطيل ٤$\frac{١}{٢}$ سم، ٢٠ سم

مثال ٦

لدى سعيد ٢٠ لعبة يريد بيعها، وربحه يعتمد على عدد الألعاب التي سيبيعها، وعلى سعر اللعبة الواحدة. شكّل سعيد دالة ليحدّد سعر البيع س (بالريال العُماني) الذي يجب أن يبيع به كل لعبة ليحصل على الربح (ح)

ح = س(س - ٢٠)

أوجد سعر البيع للّعبة الواحدة إذا كان سعيد يريد ربح ١٢٠٠٠ ريال عُماني.

الحلّ

ح = س(س - ٢٠)

(عوّض عن قيمة ح في الصيغة)

١٢٠٠٠ = س(س - ٢٠)

(فكّ الأقواس)

١٢٠٠٠ = س^{٢} - ٢٠س

(أعد ترتيب المعادلة التربيعية لتصبح مساوية للصفر)

س^{٢} - ٢٠س - ١٢٠٠٠ = ٠

(حلّل المعادلة التربيعية إلى العوامل)

(س - ١٢٠)(س + ١٠٠) = ٠

(حدّد قيمة س التي تجعل كل عامل صفرًا)

س = -١٠٠ (مرفوض) أو س = ١٢٠

(اختر قيمة س التي تتناسب مع سياق المسألة، حيث إنه من المستحيل لسعر الألعاب أن يكون عددًا سالبًا)

س = ١٢٠ ريال عُماني

سعر البيع للّعبة الواحدة يساوي ١٢٠ ريالًا عُمانيًّا.

تمارين ١-١

١) حلّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية باستخدام التحليل إلى العوامل:

أ) $س^{٢} + ٣س - ١٠ = ٠$

ب) $٥س^{٢} + ١٩س + ١٢ = ٠$

ج) $٢٠ - ٧س = ٦س^{٢}$

د) $س(١٠س - ١٣) = ٣$

تمارين ١-١ (تابع ١)

٢) حلّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

أ) $س - \frac{٦}{س - ٥} = ٠$

ب) $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{س + ٢} = ١$

ج) $س^{٢} = \frac{٥س + ١}{٤} - \frac{٢س - ١}{٢}$

د) $\frac{٥}{س + ٣} + \frac{٣س}{س + ٤} = ٢$

هـ) $\frac{٣}{س + ١} + \frac{١}{س(س + ١)} = ٢$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

و) $\frac{١}{(س + ١)(س + ٢)} = \frac{١}{س - ١} + \frac{٣}{س + ٢}$

تمارين ١-١ (تابع ٢)

٣) حلّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

مساعدة: تذكّر أن تتحقق من كلّ ناتج من النواتج.

أ) $\frac{٣س^٢ + س - ١٠}{س^٢ - ٧س + ٦} = ٠$

ب) $\frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ + ٥} = ٠$

ج) $\frac{س^٢ - ٩}{٧س + ١٠} = ٠$

د) $\frac{س^٢ - ٢س - ٨}{س^٢ + ٧س + ١٠} = ٠$

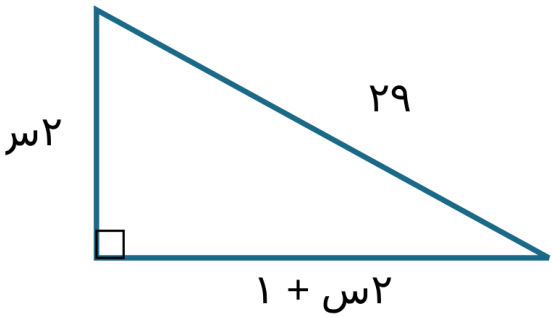
هـ) $\frac{٦س^٢ + س - ٢}{س^٢ + ٧س + ٤} = ٠$

و) $\frac{٢س^٢ + ٩س - ٥}{س^٤ + ١} = ٠$

تمارين ١-١ (تابع ٣)

٤) يبيّن الشكل المجاور مثلثًا قائم الزاوية أطوال أضلاعه (٢س) سم، (٢س + ١) سم، ٢٩ سم.

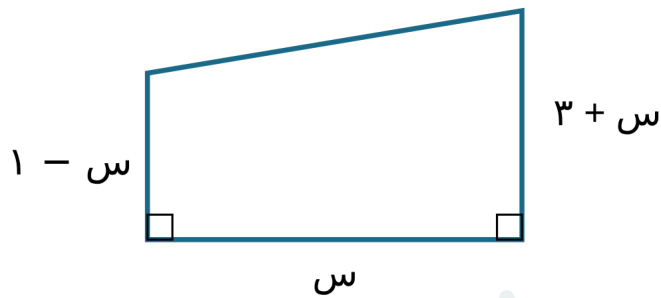
خالد كمال
khaled-math.surge.sh



أ) بيّن أن ٢س^{٢} + س - ٢١٠ = ٠

ب) أوجد أطوال أضلاع المثلّث.

٥) مساحة شبه المنحرف المجاور ٣٥,٧٥ سم^{٢}. أوجد قيمة س.



تمارين ١-١ (تابع ٤)

٦) ★ تمّ رمي كرة في الهواء. يمكن تمثيل ارتفاعها عن سطح الأرض (ع متر)، بالمعادلة:

ع = ٣ + ٢ن - ن^{٢}،

حيث ن الزمن بالثواني. بقيت الكرة في الهواء منذ اللحظة الأولى لرميها. أوجد:

أ) الارتفاع الذي كانت عليه الكرة عند رميها في اللحظة الأولى.

ب) الزمن اللازم لتكون الكرة على ارتفاع ٤ أمتار.

٧) يتم تحديد أرباح مصنع (بمئات الريالات العُمانية) لعملية تصنيع منتج ما في شهر واحد بواسطة:

ر = ٢س^{٢} - ٧س

حيث س عدد القطع المنتجة.

أ) كم قطعة يجب أن ينتج المصنع ليبيعها فيكون الربح صفرًا؟ وضّح إجابتك.

ب) كم قطعة يجب أن ينتج المصنع لربح ٦٦٠٠٠ ريالًا عُمانيًّا؟

ورقة الإجابات النموذجية ١-١

تمرين ١: أ) س = ٢ أو س = -٥ | ب) س = $-\frac{٤}{٥}$ أو س = -٣ | ج) س = $\frac{٤}{٣}$ أو س = $-\frac{٥}{٢}$ | د) س = $\frac{٣}{٢}$ أو س = $-\frac{١}{٥}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمرين ٢: أ) س = ٦ أو س = -١ | ب) س = ٤ أو س = -١ | ج) س = ١ أو س = $-\frac{٣}{٤}$ | د) س = ٢ أو س = -٢ | هـ) س = ١ أو س = $-\frac{١}{٢}$ | و) س = ٠ أو س = $-\frac{١}{٢}$

تمرين ٣: أ) س = $\frac{٥}{٣}$ أو س = -٢ | ب) س = ٢ أو س = -٣ | ج) س = ٣ أو س = -٣ | د) س = ٤ فقط (س = -٢ مرفوضة لأنها تجعل المقام صفرًا) | هـ) س = $\frac{١}{٢}$ أو س = $-\frac{٢}{٣}$ | و) س = $\frac{١}{٢}$ أو س = -٥

تمرين ٤: أ) $(٢س)^{٢} + (٢س + ١)^{٢} = ٩٢^{٢}$ فينتج $٨س^{٢} + ٤س + ١ = ٨٤١$ ثم $٢س^{٢} + س - ٢١٠ = ٠$ | ب) (٢س - ٢١)(س + ١٠) = ٠ ومنها س = ١٠ والأضلاع ٢٠ سم، ٢١ سم، ٢٩ سم

تمرين ٥: $\frac{١}{٢}$ × س × (س - ١ + س + ٣) = ٣٥,٧٥، $س^{٢} + س - ٣٥,٧٥ = ٠$ ومنها **س = ٥,٥ سم**

تمرين ٦: أ) ٣ أمتار | ب) $ن^{٢} - ٢ن + ١ = ٠,٠$، $(ن - ١)^{٢} = ٠,٠$، ن = ١ ثانية

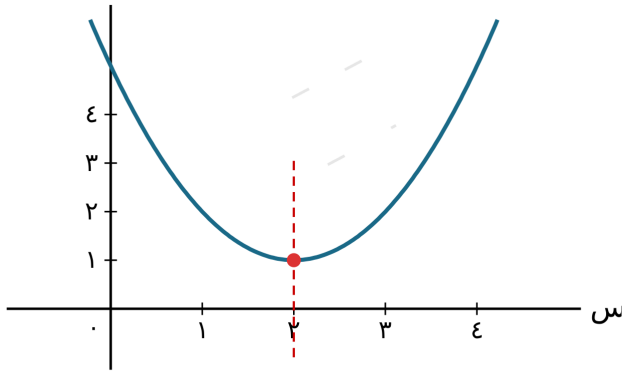
تمرين ٧: أ) س(٢س - ٧) = ٠، س = ٠ أو س = ٣,٥. وبما أن عدد القطع عدد صحيح فالحل س = ٣,٥ مرفوض، فالربح صفر عند ٠ قطعة (أي لا ربح قبل بدء الإنتاج) | ب)
٢س^{٢} - ٧س - ٦٦٠ = ٠، (٢س + ٣٣)(س - ٢٠) = ٠، س = ٢٠ قطعة

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٢-١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا

الدالة التربيعية صورتها العامة د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ، حيث أ ≠ ٠. منحنى الدالة التربيعية يسمّى القطع المكافئ. إذا كانت أ > ٠ فللمنحنى نقطة صغرى، وإذا كانت أ < ٠ فللمنحنى نقطة عظمى. نقطة الانعطاف تسمّى النقطة الحرجة (رأس المنحنى)، والمنحنى متماثل حول مستقيم رأسي يسمّى محور التماثل.

khaled



محور التماثل س = ٢ والنقطة الصغرى (٢ ، ١)

مثال ٧

ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} - ٣س - ٤، س ∈ ح. حدّد تقاطع المنحنى مع المحورين، ومحور التماثل، والنقطة الحرجة.

الحلّ

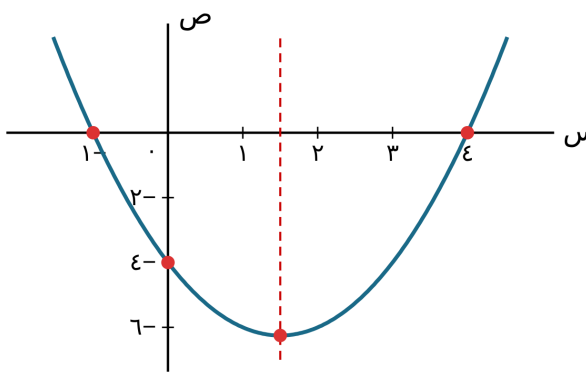
التقاطع مع محور ص: س = ٠ فتكون ص = -٤، النقطة (٠ ، -٤)

التقاطع مع محور س: $س^{٢}$ - ٣س - ٤ = ٠،

(س + ١)(س - ٤) = ٠، فتكون س = -١ أو س = ٤، النقطتان (-١ ، ٠) و (٤ ، ٠)

محور التماثل: س = $\frac{-١ + ٤}{٢}$ = ١,٥

النقطة الحرجة: ص = $(١,٥)^{٢}$ - ٣(١,٥) - ٤ = -٦,٢٥، النقطة (١,٥ ، -٦,٢٥)



محور التماثل س = ١,٥ والنقطة الصغرى (١,٥ ، -٦,٢٥)

مثال ٨

ارسم منحنى ص = ١٠ + ٨س - ٢س^{٢}. حدّد نقاط التقاطع مع المحورين، ومحور التماثل، والنقطة الحرجة.

الحلّ

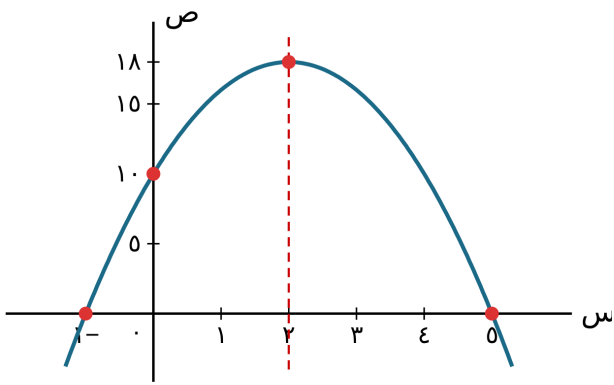
التقاطع مع محور ص: س = ٠ فتكون ص = ١٠، النقطة (٠ ، ١٠)

التقاطع مع محور س: ١٠ + ٨س - ٢س^{٢} = ٠،

٢(٥ - س)(١ + س) = ٠، س = ٥ أو س = -١

$$\text{محور التماثل: س} = \frac{٥ + (-١)}{٢} = ٢$$

النقطة الحرجة: ص = ١٠ + ٨(٢) - ٢(٢)^{٢} = ١٨، النقطة العظمى (٢ ، ١٨)



محور التماثل س = ٢ والنقطة العظمى (٢ ، ١٨)

مثال ٩

ارسم منحنى ص = س^{٢} - ٦س + ٩. حدّد نقاط التقاطع مع المحورين، ومحور التماثل، والنقطة الحرجة.

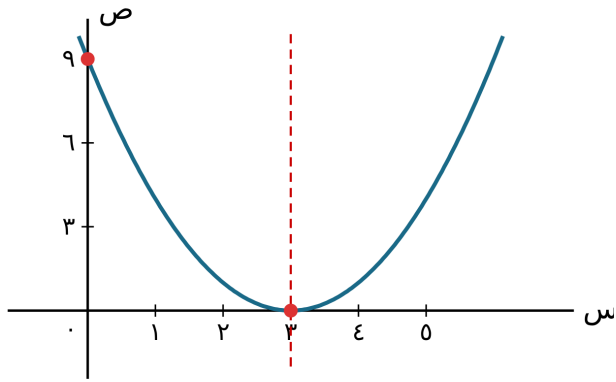
الحلّ

التقاطع مع محور ص: س = ٠ فتكون ص = ٩، النقطة (٠ ، ٩)

التقاطع مع محور س: س^{٢} - ٦س + ٩ = ٠، (س - ٣)^{٢} = ٠،

س = ٣ (جذر مكرر) فالمنحنى يمسّ محور س عند (٣ ، ٠)

محور التماثل س = ٣، والنقطة الحرجة (٣ ، ٠) وهي نقطة صغرى



مثال ١٠

يُمثّل ارتفاع طائرة ورقية ع (بآلاف الأقدام) بعد ن ساعة بالدالة ع = ٨ + ١٥ن - ٢ن^{٢}. أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة.

الحلّ

الجذور: ٨ + ١٥ن - ٢ن^{٢} = ٠، (٨ - ن)(١ + ٢ن) = ٠، ن = ٨ أو ن = -٠٫٥

محور التماثل: ن = $\frac{٨ + (-٠٫٥)}{٢}$ = ٣٫٧٥

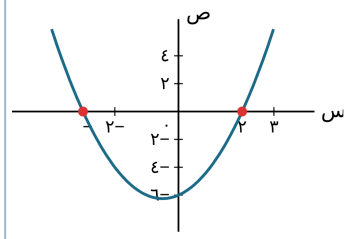
أقصى ارتفاع: ع = ٨ + ١٥(٣٫٧٥) - ٢(٣٫٧٥)^{٢} = ٣٦٫١٢٥ ألف قدم، أي ٣٦١٢٥ قدمًا

تمارين ١-٢

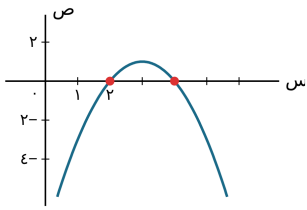
١) استخدم التمثيل البياني لكل دالة لإيجاد محور التماثل والنقطة الحرجة:

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

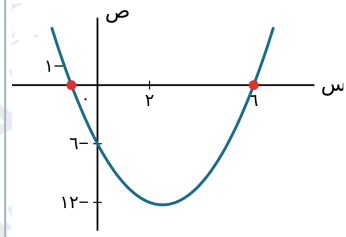
أ) ص = س^{٢} + س - ٦



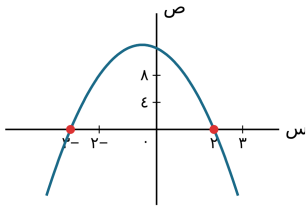
ب) ص = -س^{٢} + ٦س - ٨



ج) ص = س^{٢} - ٥س - ٦



د) ص = ١٢ - ٢س - ٢س^{٢}



٢) لكلّ دالة ممّا يأتي، أوجد: ١) نقاط التقاطع مع المحورين. ٢) محور التماثل والنقطة الحرجة.

أ) ص = س^{٢} - ٢س - ٨ | ب) ص = س^{٢} - ٩ | ج) ص = ١٥ + ٢س - س^{٢} | د) ص = ٢س^{٢} - ١٥س + ١٨

٣) استخدم التماثل لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لكلّ دالة، ثم ارسم المنحنى مبيّنًا جميع نقاط التقاطع: أ) ص = س^{٢} - س - ٢٠ | ب) ص = س^{٢} + ٤س - ٢١ | ج) ص = س^{٢} + ٣س - ٢٨

٤) مساحة غرفة م = ٥س - س^{٢} (م بالمتر المربع)، حيث بُعداها س و (٥ - س) متر. أوجد أكبر مساحة ممكنة للغرفة وبُعديها.

٥) ر = س(١٢ - س) هو ربح شركة بآلاف الريالات العُمانية، حيث س عدد الوحدات المبيعة. أوجد أكبر ربح ممكن وعدد الوحدات اللازمة له.

ورقة الإجابات النموذجية ١-٢

تمرين ١: أ) المحور س = -٠٫٥، النقطة (-٠٫٥ ، -٦٫٢٥) | ب) المحور س = ٣، النقطة (٣ ، ١) | ج) المحور س = ٢٫٥، النقطة (٢٫٥ ، -١٢٫٢٥) | د) المحور س = -٠٫٥، النقطة (-٠٫٥ ، ١٢٫٥)

تمرين ٢: أ) (٠ ، -٨)، (-٢ ، ٠)، (٤ ، ٠)، المحور س = ١، النقطة (١ ، -٩) | ب) (٠ ، -٩)، (-٣ ، ٠)، (٣ ، ٠)، المحور س = ٠، النقطة (٠ ، -٩) | ج) (٠ ، ١٥)، (-٣ ، ٠)، (٥ ، ٠)، المحور س = ١، النقطة (١ ، ١٦) | د) (٠ ، ١٨)، (١٫٥ ، ٠)، (٦ ، ٠)، المحور س = ٣٫٧٥، النقطة (٣٫٧٥ ، -١٠٫١٢٥)

تمرين ٣: أ) قيمة صغرى -٢٠٫٢٥ عند س = ٠٫٥، التقاطعات (-٤ ، ٠)، (٥ ، ٠)، (٠ ، -٢٠) | ب) قيمة صغرى -٢٥ عند س = -٢، (-٧ ، ٠)، (٣ ، ٠)، (٠ ، -٢١) | ج) قيمة صغرى -٣٠٫٢٥ عند س = -١٫٥، (-٧ ، ٠)، (٤ ، ٠)، (٠ ، -٢٨)

تمرين ٤: م = س(٥ - س)، الجذران ٠ و ٥، المحور س = ٢٫٥، أكبر مساحة ٦٫٢٥ م² وبُعداها ٢٫٥ م × ٢٫٥ م

تمرين ٥: الجذران ٠ و ١٢، المحور س = ٦، أكبر ربح ٣٦ ألف ريال عُماني عند بيع ٦ وحدات

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٣-١ المتباينات التربيعية

يمكن حلّ المتباينة الخطية جبريًّا: ٢(س - ٥) > ٩ ينتج س > ٩٫٥ ، و ٥ - ٣س ≥ ١٧ ينتج س ≤ -٤ .

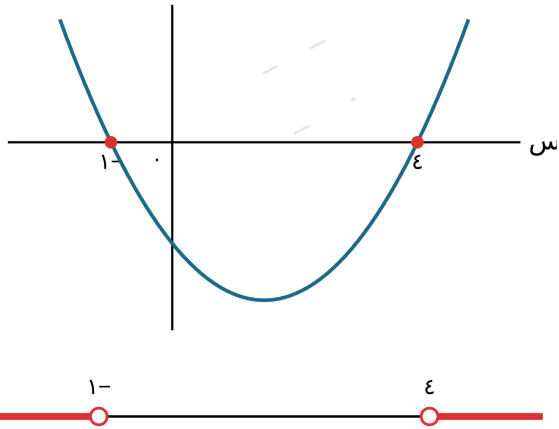
نتيجة ١: يمكن كتابة المتباينة التربيعية في الصورة أ $س^{٢}$ + ب س + جـ □ ٠ ، حيث □ أحد الرموز ≤ ، ≥ ، > ، < . مجموعة الحلّ هي قيم س التي تحقّق المتباينة، ويمكن إيجادها باستخدام التمثيل البياني للدالة.

مثال ١١

حلّ المتباينة $س^{٢}$ - ٣س - ٤ > ٠

الحلّ

الجذران: (س + ١)(س - ٤) = ٠ ، س = -١ أو س = ٤ .
المنحنى مفتوح للأعلى، والمطلوب أن تكون ص موجبة، أي أن يكون المنحنى فوق محور س .



مجموعة الحلّ: س < -١ أو س > ٤

مثال ١٢

حلّ المتباينة $٢س^{٢} \geq ١٥ - س$

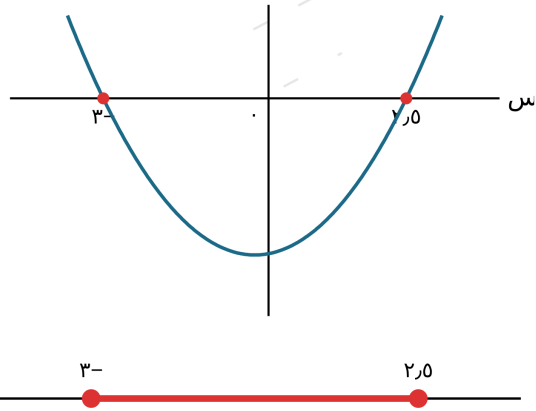
الحلّ

$٢س^{٢} + س - ١٥ \geq ٠$ ، $(٢س - ٥)(س + ٣) \geq ٠$ ، الجذران

س = -٣ و س = ٢,٥ .

المطلوب أن يكون المنحنى على محور س أو تحته.

مجموعة الحلّ: -٣ ≤ س ≤ ٢,٥



مثال ١٣

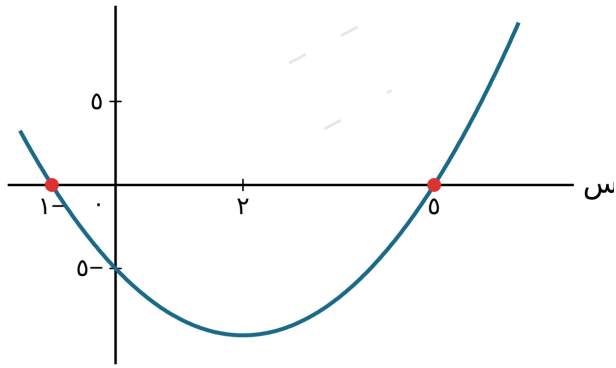
يمثّل ر = س^{٢} - ٤س - ٥ ربح شركة بمئات الريالات العُمانية، حيث س عدد الوحدات المبيعة بالمئات. أوجد عدد الوحدات التي تحقّق عندها الشركة ربحًا.

الحلّ

الربح يعني ر > ٠ ، أي س^{٢} - ٤س - ٥ > ٠ ،

(س - ٥)(س + ١) > ٠ ، س < -١ أو س > ٥ .

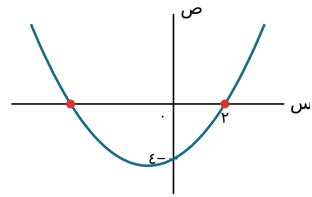
وبما أن س ≥ ٠ فالربح عندما س > ٥ ، أي عند بيع أكثر من ٥٠٠ وحدة.



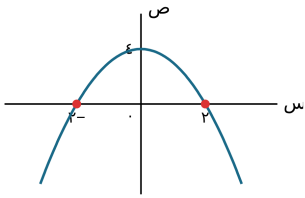
تمارين ١-٣

١) استخدم كلّ منحنى لحلّ المتباينة المعطاة:

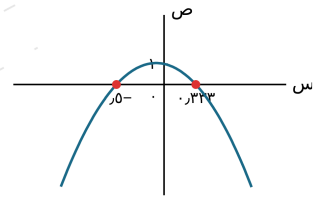
أ) $\frac{١}{٢}س^{٢} + س - ٤ \geq ٠$



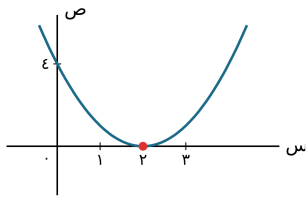
ب) $٤ - س^{٢} > ٠$



ج) ١ - س - ٦س^{٢} ≤ ٠



د) س^{٢} - ٤س + ٤ > ٠



٢) حلّ المتباينات الآتية: أ) (س + ٣)(س - ٤) > ٠ | ب) (س - ١)(س - ٥) ≤ ٠ | ج) (س + ٧)(س - ٣) ≥ ٠ | د) س(س - ٥) < ٠ | هـ) (٢س + ١)(س - ٤) < ٠ | و) (س + ١)(س - ٣) ≤ ٠ | ز) (٣س + ٣)(س - ٥) < ٠ | ح) (س - ٥)^{٢} ≥ ٠ | ط) (س - ٣)^{٢} ≤ ٠

٣) حلّ المتباينات الآتية: أ) س^{٢} + ٥س - ١٤ < ٠ | ب) -س^{٢} - س + ٦ ≥ ٠ | ج) س^{٢} - ٩س + ٢٠ ≥ ٠ | د) س^{٢} + ٢س - ٤٨ > ٠ | هـ) ٢س^{٢} - س - ١٥ ≤ ٠ | و) ٥س^{٢} + ٩س + ٤ > ٠

٤) حلّ المتباينات الآتية: أ) س^{٢} < ١٨ - ٣س | ب) س^{٢} + ٣٥ > ١٢س | ج) س(٣ - ٢س) ≥ ١ | د) س^{٢} + ٤س > ٣(س + ٢) | هـ) (س + ٣)(١ - س) > س - ١

٥) ارتفاع لعبة طائرة (بالأمتار) بعد ن ثانية من إطلاقها يُعطى بالمعادلة ع = ٥ن - ن^{٢}. لكم ثانية تكون اللعبة على ارتفاع يزيد على ٤ أمتار؟

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات النموذجية ١-٣

تمرين ١: أ) -٤ ≤ س ≤ ٢ | ب) س < -٢ أو س > ٢ | ج) -٠٫٥ ≤ س ≤ $\frac{١}{٣}$ | د) س ≠ ٢ (كل الأعداد الحقيقية ما عدا ٢)

تمرين ٢: أ) س < -٣ أو س > ٤ | ب) س ≥ ١ أو س ≤ ٥ | ج) -٧ ≤ س ≤ ٣ | د) ٠ < س < ٥ | هـ) -٠٫٥ < س < ٤ | و) س ≥ -١ أو س ≤ ٣ | ز) -١٫٥ < س < ٥ | ح) س = ٥ | ط) كل الأعداد الحقيقية

تمرين ٣: أ) -٧ < س < ٢ | ب) س ≥ -٣ أو س ≤ ٢ | ج) ٤ ≥ س ≥ ٥ | د) س < -٨ أو س > ٦ | هـ) س ≥ -٢٫٥ أو س ≤ ٣ | و) س < -١ أو س > -٠٫٨

تمرين ٤: أ) -٣ < س < ٦ | ب) ٥ < س < ٧ | ج) س ≥ ٠٫٥ أو س ≤ ١ | د) -٣ < س < ٢ | هـ) س < -٤ أو س > ١

تمرين ٥: (ن - ١)(ن - ٤) < ٠ ، ١ < ن < ٤ ، أي ٣ ثوانٍ

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١-٤ جذور المعادلة التربيعية

درست في الفصل الدراسي الثاني من الصف العاشر، الوحدة التاسعة كيفية حلّ المعادلات التربيعية باستخدام الصيغة التربيعية. الصيغة التربيعية هي س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ ، وتسمّى النواتج جذورًا roots للمعادلة.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

$س^{٢} + ٢س - ٨ = ٠$

$$س = \frac{-٢ \pm \sqrt{(٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times (-٨)}}{٢ \times ١}$$

$$س = \frac{-٢ \pm \sqrt{٣٦}}{٢}$$

س = ٢ أو س = -٤

جذران حقيقيان مختلفان

$س^{٢} + ٦س + ٩ = ٠$

$$س = \frac{-٦ \pm \sqrt{(٦)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٩}}{٢ \times ١}$$

$$س = \frac{-٦ \pm \sqrt{٠}}{٢}$$

س = -٣ (جذر مكرر)

جذران حقيقيان متساويان

س^{٢} + ٢س + ٦ = ٠

$$س = \frac{-٢ \pm \sqrt{(٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٦}}{٢ \times ١}$$

$$س = \frac{-٢ \pm \sqrt{-٢٠}}{٢}$$

لا يوجد جذر حقيقي

لا توجد جذور حقيقية

يسمّى الجزء تحت الجذر التربيعي في الصيغة التربيعية **المميّز** discriminant.

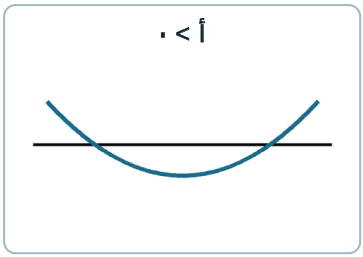
نتيجة ٢: مميّز المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ هو ب^{٢} - ٤أجـ .

تدلّ إشارة المميّز (موجبة أو صفرًا أو سالبة) على عدد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية.

أنواع الجذور وشكل المنحنى

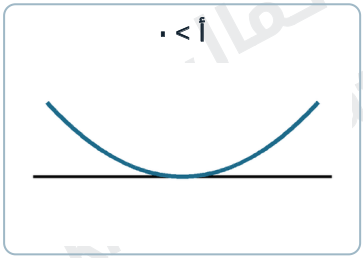
يوجد رابط بين عدد جذور المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ونقاط تقاطع منحنى الدالة ص = أ س^{٢} + ب س + جـ مع محور السينات.

ب^{٢} - ٤أجـ > ٠ : جذران حقيقيان مختلفان



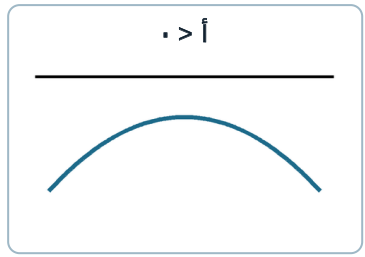
يقطع المنحنى محور السينات في نقطتين مختلفتين

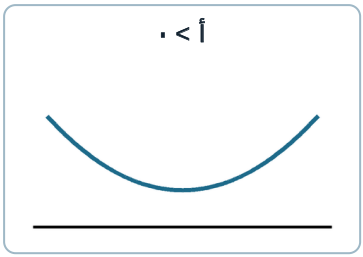
ب^{٢} - ٤أجـ = ٠ : جذران حقيقيان متساويان (جذر حقيقي واحد مكرّر)



يمسّ المنحنى محور السينات في نقطة واحدة

ب^{٢} - ٤أجـ < ٠ : لا توجد جذور حقيقية





يقع المنحنى فوق محور السينات أو تحته بشكل كامل

مثال ١٤

استخدم المميّز لتحدّد عدد الجذور الحقيقية لكل معادلة تربيعية من المعادلات الآتية: أ) س^{٢} - ٢س + ٧ = ٠ | ب) ١٠ + ٣س - س^{٢} = ٠ | جـ) س^{٢} = ٢٥ | د) س^{٢} - ٥س + ١٥ = ٥س - ١٠

khaled-ma

الحلّ

أ) أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = ٧ ،
ب^{٢} - ٤أجـ = (-٢)^{٢} - ٤ × ١ × ٧ = -٢٤ < ٠ ∴ لا توجد جذور حقيقية.

ب) أ = -١ ، ب = ٣ ، جـ = ١٠ ،
ب^{٢} - ٤أجـ = ٣^{٢} - ٤ × (-١) × ١٠ = ٤٩ > ٠ ∴ يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

ج) س^{٢} - ٢٥ = ٠ ، أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = -٢٥ ،
ب^{٢} - ٤أجـ = ٠^{٢} - ٤ × ١ × (-٢٥) = ١٠٠ > ٠ ∴ يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

د) س^{٢} - ١٠س + ٢٥ = ٠ ، أ = ١ ، ب = -١٠ ، جـ = ٢٥ ،
ب^{٢} - ٤أجـ = (-١٠)^{٢} - ٤ × ١ × ٢٥ = ٠ ∴ يوجد جذران حقيقيان متساويان.

مثال ١٥ ومثال ١٦

مثال ١٥

أوجد قيم ك إذا كان للمعادلة س^{٢} - ٣س + ٦ = ك(س - ٢) جذران متساويان.

الحلّ

$س^{٢} - ٣س + ٦ - ك س + ٢ك = ٠$ ، أي

$س^{٢} - (٣ + ك)س + ٦ + ٢ك = ٠$

الجذران متساويان، لذا $ب^{٢} - ٤أجـ = ٠$ ، حيث $أ = ١$ ،

$ب = -(٣ + ك)$ ، $جـ = ٦ + ٢ك$

$(٣ + ك)^{٢} - ٤ \times ١ \times (٦ + ٢ك) = ٠$

$ك^{٢} + ٦ك + ٩ - ٢٤ - ٨ك = ٠$

$ك^{٢} - ٢ك - ١٥ = ٠$ ، $(ك + ٣)(ك - ٥) = ٠$

$\therefore ك = -٣$ أو $ك = ٥$

مثال ١٦

أوجد قيم ك إذا كان للمعادلة $س^{٢} + (ك - ٢)س + ٤ = ٠$ جذران حقيقيان مختلفان.

الحلّ

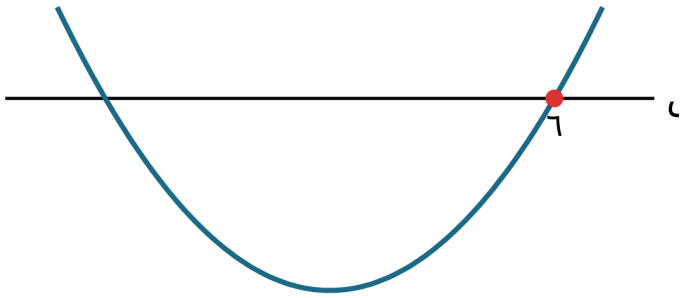
الجذران مختلفان، لذلك $ب^{٢} - ٤أجـ > ٠$

$(ك - ٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٤ > ٠$ ، $ك^{٢} - ٤ك + ٤ - ١٦ > ٠$ ،

$ك^{٢} - ٤ك - ١٢ > ٠$

$(ك - ٦)(ك + ٢) > ٠$ (بما أنها متباينة نستخدم طريقة الدرس ١-٣ برسم المنحنى)

من الرسم نلاحظ أن $ك < -٢$ أو $ك > ٦$



تمارين ١-٤

١) حدّد ما إذا كان لكل معادلة من المعادلات الآتية جذران حقيقيان مختلفان، أو جذران حقيقيان متساويان، أو لا جذور حقيقية لها: أ) $س^{٢} + ٤س + ٤ = ٠$ | ب) $س^{٢} + ٤س - ٢١ = ٠$ | ج) $س^{٢} + ٩س + ١ = ٠$ | د) $س^{٢} - ٣س + ١٥ = ٠$ | هـ) $س^{٢} - ٦س + ٢ = ٠$ | و) $٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٥ = ٠$ | ز) $٣س^{٢} + ٢س + ٧ = ٠$ | ح) $٥س^{٢} - ٢س - ٩ = ٠$

٢) أوجد قيم ك، حيث للمعادلة $س^{٢} + ك س + ٩ = ٠$ جذران حقيقيان متساويان.

٣) أوجد قيم ك، حيث للمعادلة $ك س^{٢} - ٤س + ٨ = ٠$ جذران حقيقيان مختلفان.

٤) أوجد قيم ك، حيث لا جذور حقيقية للمعادلة $٣س^{٢} + ٢س + ك = ٠$.

٥) أوجد قيم ك، حيث للمعادلة (ك + ١)س^{٢} + ك س - ٢ك = ٠ جذران حقيقيان متساويان.

٦) أوجد قيم ك، حيث للمعادلة ك س^{٢} + ٢(ك + ٣)س + ك = ٠ جذران حقيقيان مختلفان.

٧) أوجد قيم ك، حيث للمعادلة ٣س^{٢} - ٤س + ٥ - ك = ٠ جذران حقيقيان مختلفان.

٨) أوجد قيم ك، حيث للمعادلة ٤س^{٢} - (ك - ٢)س + ٩ = ٠ جذران حقيقيان متساويان.

٩) أوجد قيم ك، حيث للمعادلة ٤س^{٢} + ٤(ك - ٢)س + ك = ٠ جذران حقيقيان متساويان.

١٠) بيّن أن جذري المعادلة س^{٢} + (ل - ٣)س - ٣ل = ٠ حقيقيان لكل قيم ل الحقيقية.

١١) بيّن أن جذري المعادلة ك س^{٢} + ٥س - ٢ك = ٠ حقيقيان ومختلفان لكل قيم ك الحقيقية.

١٢) تمثّل الدالة ر = س^{٢} - ٨س + ١٢ إجمالي ربح (ر) شركة (بمئات الآلاف الريالات العُمانية)، حيث س عدد الأيام منذ بدء العمل في السنة الأولى. وضّح متى تبدأ الشركة تحقّق ربحًا في السنة الأولى.

ورقة الإجابات النموذجية ١-٤

تمرين ١: أ) متساويان (المميّز ٠) | ب) مختلفان (١٠٠) | ج) مختلفان (٧٧) | د) لا جذور (-٥١) | هـ) مختلفان (٢٨) | و) متساويان (٠) | ز) لا جذور (-٨٠) | ح) مختلفان (١٨٤)

تمرين ٢: $ك^{٢} - ٣٦ = ٠$ ، $ك = ٦$ أو $ك = -٦$

تمرين ٣: $١٦ - ٣٢ك > ٠$ ، $ك < ٠٫٥$ مع $ك \neq ٠$

تمرين ٤: $٤ - ١٢ك < ٠$ ، $ك > \frac{١}{٣}$

تمرين ٥: $ك^{٢} + ٨ك(ك + ١) = ٠$ ، $٩ك^{٢} + ٨ك = ٠$ ، $ك = ٠$ أو $ك = \frac{-٨}{٩}$

تمرين ٦: $٤(ك + ٣)^{٢} - ٤ك^{٢} > ٠$ ، $٦ك + ٩ > ٠$ ، $ك > -١٫٥$ مع $ك \neq ٠$

تمرين ٧: $١٦ - ١٢(٥ - ك) > ٠$ ، $١٢ك > ٤٤$ ، $ك > \frac{١١}{٣}$

تمرين ٨: $(ك - ٢)^{٢} = ١٤٤$ ، $ك = ١٤$ أو $ك = -١٠$

تمرين ٩: $١٦(ك - ٢)^{٢} - ١٦ك = ٠$ ، $ك^{٢} - ٥ك + ٤ = ٠$ ، $ك = ١$ أو $ك = ٤$

تمرين ١٠: المميّز $= (ل - ٢)^{٢} + ٨ل = (ل + ٢)^{٢} \geq ٠$ لكل قيم ل

تمرين ١١: المميّز $= ٢٥ + ٨ك^{٢} > ٠$ لكل قيم ك

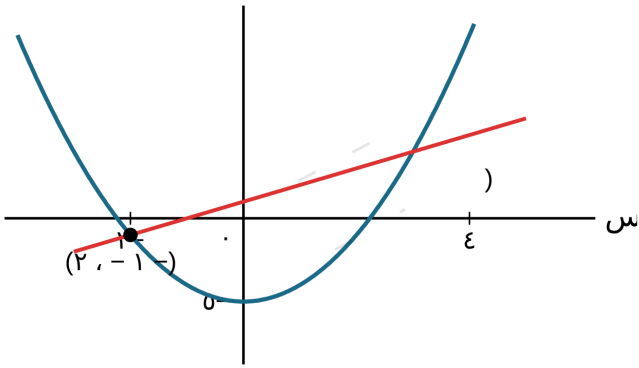
تمرين ١٢: $ر > ٠$ ، $(س - ٢)(س - ٦) > ٠$ ، $س < ٢$ أو $س > ٦$.
تكون ر سالبة (خسارة) بين اليومين ٢ و ٦ ، وتعود الشركة للربح بعد اليوم السادس ($س > ٦$)

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

١-٥ حلّ المعادلات الآتية (معادلة خطية ومعادلة تربيعية)

سوف تتعلّم في هذا الدرس كيف نحلّ معادلتين آنيتين إحداهما خطية والأخرى معادلة تربيعية.



يبيّن الشكل التمثيل البياني للدالتين ص = س + ١ ، ص = س^{٢} - ٥ . إحداثيّات نقطتَي تقاطع الخط المستقيم ومنحنى الدالة التربيعية هما (-٢ ، -١) ، (٣ ، ٤) . هذا يعني أن س = -٢ ، ص = -١ أو س = ٣ ، ص = ٤ حلول للمعادلتين الآنيتين.

يمكن أيضًا إيجاد الحلول جبريًّا: ص = س^{٢} - ٥ ..... (١) ،
ص = س + ١ ..... (٢). عوّض عن قيمة ص من المعادلة (٢) في المعادلة (١): س + ١ = س^{٢} - ٥ ، أعد ترتيب المعادلة:
س^{٢} - س - ٦ = ٠ ، حلّل إلى العوامل: (س - ٣)(س + ٢) = ٠ ،
س = -٢ أو س = ٣ . عوّض عن قيمة س = -٢ في المعادلة (٢):
ص = -٢ + ١ = -١ ، وعوّض س = ٣: ص = ٣ + ١ = ٤ . الحلول هي: س = -٢ ، ص = -١ أو س = ٣ ، ص = ٤ .

مثال ١٧

حلّ المعادلتين الآنيتين: ص = س^{٢} ، ص = س + ١٢

الحلّ

ص = س^{٢} ..... (١) ، ص = س + ١٢ ..... (٢)
عوّض عن ص من المعادلة (٢) في المعادلة (١):
س + ١٢ = س^{٢}
أعد الترتيب: س^{٢} - س - ١٢ = ٠ ، حلّل إلى العوامل:
(س - ٤)(س + ٣) = ٠ ، س = -٣ أو س = ٤
عندما س = -٣ ، فإن ص = -٣ + ١٢ = ٩
عندما س = ٤ ، فإن ص = ٤ + ١٢ = ١٦
الحلول هي س = -٣ ، ص = ٩ و س = ٤ ، ص = ١٦ ، أي أن منحنيَي ص = س + ١٢ و ص = س^{٢} يتقاطعان عند (-٣ ، ٩) ، (٤ ، ١٦)

تمارين ١-٥

حلّ كلّ زوج من أزواج المعادلات الآتية:

ا) ص = س^{٢} ، ص = س + ٦

٢) س + ٣ص = ٠ ، ٢س^{٢} + ٣ص = ١

ورقة الإجابات النموذجية ١-٥

تمرين ١: س^{٢} - س - ٦ = ٠ ، (س - ٣)(س + ٢) = ٠ ، الحلول:
س = ٣ ، ص = ٩ و س = -٢ ، ص = ٤

تمرين ٢: من الأولى ٣ص = -س ، نعوّض: ٢س^{٢} - س = ١ ،
٢س^{٢} - س - ١ = ٠ ، (٢س + ١)(س - ١) = ٠ ، الحلول: س = ١ ،

ص = $\frac{-١}{٣}$ و س = -٠,٥ ، ص = $\frac{١}{٦}$

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١-٦ التقاطع بين مستقيم ومنحنى الدالة التربيعية

توجد ثلاث حالات ممكنة عندما يتقاطع خط مستقيم مع منحنى الدالة التربيعية.



خالد كمال
khaled-math.surge.sh

توجد نقطتا تقاطع يقطع المستقيم المنحنى في نقطتين مختلفتين.	توجد نقطة تقاطع واحدة يمسّ المستقيم المنحنى في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ المستقيم مماسّ tangent للمنحنى.	لا توجد نقطة تقاطع لا يقطع المستقيم المنحنى.

لقد درست كيف تجد نقاط تقاطع المستقيم ص = س - ٦ مع منحنى الدالة التربيعية ص = س^{٢} - ٣س - ٢ بحلّ المعادلتين آنيًّا. ستحصل على س^{٢} - ٣س - ٢ = س - ٦ ، أي س^{٢} - ٤س + ٤ = ٠ . يمكن حلّ المعادلة التربيعية الناتجة بالتحليل إلى العوامل لتحديد قيم س لإحداثيات نقاط التقاطع: (س - ٢)(س - ٢) = ٠ ، فيكون س = ٢ ومنه ص = ٢ - ٦ = -٤ ، حيث يعطي نقطة تقاطع واحدة وهي (٢ ، -٤) ، أي إن المستقيم مماسّ لمنحنى الدالة التربيعية.

يمكن أن نحدّد عدد نقاط التقاطع باستخدام المميّز ومن دون إيجاد جذور معادلة تربيعية أو نقاط التقاطع:

ب^{٢} - ٤أجـ = (-٤)^{٢} - ٤ × ١ × ٤ = ٠ . يشير ذلك إلى وجود جذرين حقيقيَّين متساويين للمعادلة، أي يوجد حلّ وحيد، ما يعني وجود نقطة تقاطع واحدة فقط؛ وعليه، يكون المستقيم مماسًّا لمنحنى الدالة التربيعية. يعتمد عدد نقاط التقاطع على قيمة ب^{٢} - ٤أجـ .

نتيجة ٣ والأمثلة ١٨ و ١٩

نتيجة ٣: يساعدنا مميّز المعادلة التربيعية الناتجة من مساواة الدالة التربيعية بخط مستقيم على معرفة عدد نقاط تقاطعهما. ب^{٢} - ٤أجـ > ٠ : جذران حقيقيان مختلفان، نقطتا تقاطع مختلفتان. ب^{٢} - ٤أجـ = ٠ : جذران متساويان، نقطة تقاطع واحدة (المستقيم مماسّ). ب^{٢} - ٤أجـ < ٠ : لا توجد جذور حقيقية، لا توجد نقاط تقاطع. يشترط للحصول على جذرَين حقيقيَّين في المعادلة التربيعية أن يكون ب^{٢} - ٤أجـ ≥ ٠ .

مثال ١٨

بيّن أن المستقيم ص = $\frac{١}{٢}$س - ٣ يقطع المنحنى ص = س^{٢} + ٤س - ٣ في نقطتين مختلفتين.

الحلّ

$\frac{١}{٢}$س - ٣ = س^{٢} + ٤س - ٣ ، نضرب في ٢:

س - ٦ = ٢س^{٢} + ٨س - ٦ ، ٢س^{٢} + ٧س = ٠

ب^{٢} - ٤أجـ = ٧^{٢} - ٤ × ٢ × ٠ = ٤٩ > ٠

∴ المميّز > صفر ، ∴ يقطع المستقيم المنحنى في نقطتين مختلفتين.

مثال ١٩

أوجد قيمة ك حيث المستقيم ص = ٢س + ك مماس للمنحنى ص = س^{٢} - ٤س + ٤

الحلّ

س^{٢} - ٤س + ٤ = ٢س + ك ، س^{٢} - ٦س + (٤ - ك) = ٠

∵ المستقيم مماسّ للمنحنى، فإن ب^{٢} - ٤أجـ = ٠

(-٦)^{٢} - ٤ × ١ × (٤ - ك) = ٠ ، ٣٦ - ١٦ + ٤ك = ٠ ، ك = -٥

مثال ٢٠

أوجد مجموعة قيم ك بحيث يقطع المستقيم ص = س - ٥ المنحنى ص = ك س^{٢} - ٦ في نقطتين مختلفتين.

الحلّ

ك س^{٢} - ٦ = س - ٥ ، ك س^{٢} - س - ١ = ٠

∵ المستقيم يقطع المنحنى في نقطتين مختلفتين، فإن ب^{٢} - ٤أجـ > ٠

(-١)^{٢} - ٤ × ك × (-١) > ٠ ، ١ + ٤ك > ٠ ، ك > $-\frac{١}{٤}$ ، ك ≠ ٠

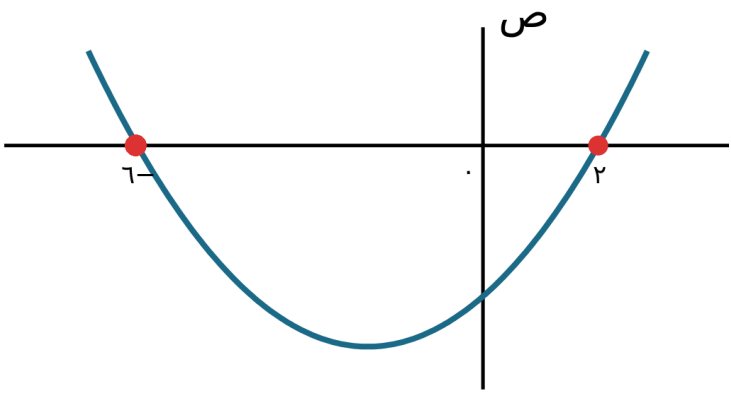
(في هذه الحالة نحتاج إلى عدم أخذ ك = ٠ بعين الاعتبار لأن شكل المعادلة سيكون ص = -٦ وهي معادلة غير تربيعية، أي عدم جواز استخدام المميّز.)

مثال ٢١

أوجد مجموعة قيم ك بحيث لا يقطع المستقيم
ص = ك س - ٣ المنحنى ص = س^{٢} - ٢س + ١

الحلّ

س^{٢} - ٢س + ١ = ك س - ٣ ، س^{٢} - (٢ + ك)س + ٤ = ٠
∵ المستقيم والمنحنى لا يتقاطعان، ∴ ب^{٢} - ٤أجـ < ٠
(٢ + ك)^{٢} - ٤ × ١ × ٤ < ٠ ، ك^{٢} + ٤ك - ١٢ < ٠ ،
(ك + ٦)(ك - ٢) < ٠
من خلال الرسم، -٦ < ك < ٢



تمارين ١-٦

١) في كل حالة من الحالات الآتية، حدّد عدد نقاط التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالة التربيعية:

أ) ص = ٤س - ٣ ، ص = س^{٢} - ٥س + ٢

ب) ص = ٣ - ٢س ، ص = ٢س^{٢} + ٣س + ٧

ج) ص = ٨س + ٣ ، ص = ١ - ٢س^{٢}

د) س + ص = ٣ ، ص = ٢ - ٣س - ٣س^{٢}

٢) أوجد قيم ك حيث المستقيم ص = ك س + ١ مماس للمنحنى ص = ٢س^{٢} + س + ٣ .

٣) أوجد قيمة ك حيث المحور السيني مماس للمنحنى ص = س^{٢} + (٣ - ك)س - (٤ك + ٣) .

٤) أوجد قيم العدد الثابت جـ حيث المستقيم ص = س + جـ مماس للمنحنى ص = ٣س + $\frac{٢}{\text{س}}$.

٥) أوجد مجموعة قيم ك حيث يقطع المستقيم ص = ٣س + ١ المنحنى ص = س^{٢} + ك س + ٢ في نقطتين مختلفتين.

٦) المستقيم ص = ٢س + ك مماس للمنحنى س^{٢} + ٢س ص + ٢٠ = ٠ . أ) أوجد القيم الممكنة للعدد ك . ب) أوجد لكل قيمة من قيم ك التي وجدتها في الجزئية (أ) إحداثيات نقطة تقاطع المماس مع المنحنى.

٧) أوجد قيم ك حيث يتقاطع المستقيم ص = ك س - ١٠ مع المنحنى س^{٢} + ص^{٢} = ١٠س .

تمارين ١-٦ (تابع)

٨) أوجد مجموعة قيم م حيث لا يقطع المستقيم ص = م س - ٥ المنحنى ص = س^{٢} - ٥س + ٤ .

٩) أوجد قيم م الممكنة حيث يكون المستقيم ص = م س + ٦ مماسًّا للمنحنى ص = س^{٢} - ٤س + ٧ .

١٠) تمثّل الدالة ص = س^{٢} - ٧س + ك مسار قارب حول جزيرة، حيث تمّ أخذ الإحداثيات بالاعتماد على أن إحداثيات الجزيرة هي نقطة الأصل (٠ ، ٠) . يجتاز القارب حدود المنطقة بعد الجزيرة عند المستقيم ص = س - ٦ ؛ أوجد قيم الثابت ك حتى لا يجتاز القارب خطَّ الحدود البحرية.

١١) مسار جسم إلى الأعلى باتجاه الجزء الموجب لمحور السينات من نقطة ثابتة يعطى بالدالة ص = س(ك - س) ، حيث يعطي الإحداثي السيني المسافة الأفقية، ويعطي الإحداثي الصادي المسافة الرأسية من نقطة ثابتة. ما قيم الثابت ك بحيث لا يصطدم الجسم مع السطح المائل الذي يمكن تمثيله بالمستقيم ص = ٩ - ٢س ؟

ورقة الإجابات النموذجية ١-٦

تمرين ١: أ) س^{٢} - ٩س + ٥ = ٠ ، المميّز ٦١ > ٠ : نقطتان | ب) ٢س^{٢} + ٥س + ٤ = ٠ ، المميّز -٧ > ٠ : لا توجد نقاط | ج) ٣س^{٢} + ٨س + ٢ = ٠ ، المميّز ٤٨ > ٠ : نقطتان | د) ٣س^{٢} + ٢س + ١ = ٠ ، المميّز -٨ > ٠ : لا توجد نقاط

تمرين ٢: ٢س^{٢} + (١ - ك)س + ٢ = ٠ ، (١ - ك)^{٢} - ١٦ = ٠ ، ك = -٣ أو ك = ٥

تمرين ٣: المميّز (٣ - ك)^{٢} + ٤(٤ك + ٣) = ك^{٢} + ١٠ك + ٢١ = ٠ ، ك = -٣ أو ك = -٧

تمرين ٤: ٣س + $\frac{٢}{\text{س}}$ = س + جـ ، ٢س^{٢} - جـ س + ٢ = ٠ ،
جـ^{٢} - ١٦ = ٠ ، جـ = ٤ أو جـ = -٤

تمرين ٥: س^{٢} + (ك - ٣)س + ١ = ٠ ، (ك - ٣)^{٢} - ٤ > ٠ ، ك < ١
أو ك > ٥

تمرين ٦: أ) بالتعويض: ٥س^{٢} + ٢ك س + ٢٠ = ٠ ، ٤ك^{٢} - ٤٠٠ = ٠
، ك = ١٠ أو ك = -١٠ | ب) س = -$\frac{\text{ك}}{٥}$: عند ك = ١٠ النقطة (-٢ ، ٦)
، وعند ك = -١٠ النقطة (٢ ، -٦)

تمرين ٧: (١ + ك^{٢})س^{٢} - (٢٠ك + ١٠)س + ١٠٠ = ٠ ، المميّز
= ٤٠٠ك - ٣٠٠ ≥ ٠ ، ك ≤ $\frac{٣}{٤}$ (يتقاطعان في نقطتين عند ك < $\frac{٣}{٤}$
، ويتماسّان عند ك = $\frac{٣}{٤}$)

تمرين ٨: س^{٢} - (٥ + م)س + ٩ = ٠ ، (٥ + م)^{٢} - ٣٦ > ٠ ،
-١١ > م > ١

تمرين ٩: س^{٢} - (٤ + م)س + ١ = ٠ ، (٤ + م)^{٢} = ٤ ، م = -٢ أو
م = -٦

تمرين ١٠: س^{٢} - ٨س + (٦ + ك) = ٠ ، لا تقاطع:
٦٤ - ٤(٦ + ك) > ٠ ، ك < ١٠

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمرين ١١: س^{٢} - (ك + ٢)س + ٩ = ٠ ، لا تصادم:
(ك + ٢)^{٢} - ٣٦ < ٠ ، -٨ < ك < ٤ ، وبما أن ك مسافة أفقية موجبة فإن ٠ < ك < ٤

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

رسم الدوال التربيعية

لرسم المنحنى التربيعي، نحدّد الأجزاء المقطوعة من المحورين وإحداثيات نقطة التحوّل.

• لإيجاد الجزء المقطوع من المحور السيني، اجعل ص = ٠ وحلّ المعادلة الناتجة باستخدام التحليل إلى العوامل.

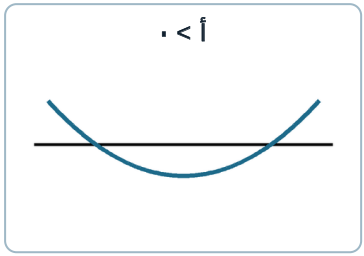
• لإيجاد الجزء المقطوع من المحور الصادي، اجعل س = ٠ واحسب ص .

• أوجد إحداثيات نقطة التحوّل عبر تحديد معادلة محور التماثل باستخدام الجزء المقطوع من المحور السيني، ثم تحديد نوع المنحنى للأعلى أم للأسفل باستخدام معامل س^{٢} .

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

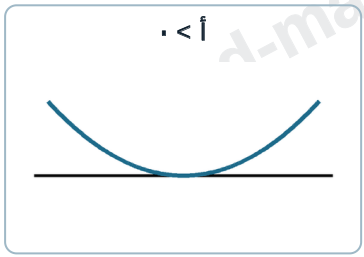
الدالة التربيعية (ص = أ س^{٢} + ب س + جـ) والمنحنى المناظر لها

ب^{٢} - ٤أجـ > ٠ : جذران حقيقيان مختلفان



يقطع المنحنى المحور السيني في نقطتين مختلفتين

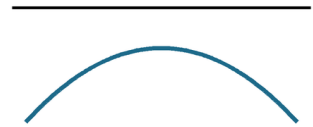
ب^{٢} - ٤أجـ = ٠ : جذران حقيقيان متساويان (جذر حقيقي واحد مكرّر)



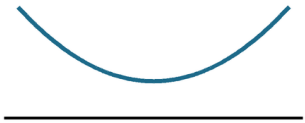
يمسّ المنحنى محور السينات في نقطة واحدة

ب^{٢} - ٤أجـ < ٠ : لا توجد جذور حقيقية

أ < ٠

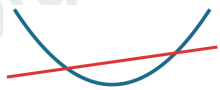
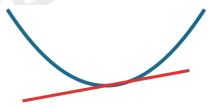
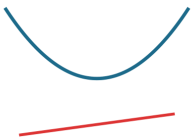


أ > ٠



يقع المنحنى فوق محور السينات أو تحته بشكل كامل

التمثيل البياني التربيعي والمستقيم

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
		
توجد نقطتا تقاطع يقطع المستقيم المنحنى في نقطتين مختلفتين.	توجد نقطة تقاطع واحدة يمسّ المستقيم المنحنى في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ المستقيم مماسّ للمنحنى.	لا توجد نقطة تقاطع لا يقطع المستقيم المنحنى.

Khaled Kamal khaled-math.surge.sh

يكون حلّ معادلة تربيعية مع معادلة مستقيم آنيًّا معادلة تربيعية في صورة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ . يعطي المميّز ب^{٢} - ٤أجـ معلومات حول عدد جذور المعادلة الناتجة وحول عدد نقاط التقاطع بين منحنى الدالة التربيعية والمستقيم. شرط حصول المعادلة على جذور حقيقية هو ب^{٢} - ٤أجـ ≥ ٠ .

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

١) أوجد مجموعة قيم ك التي لا يتقاطع عندها ص = ك(٤س - ٣) مع المنحنى ص = ٤س^{٢} + ٨س - ٨ .

٢) أوجد مجموعة قيم س حيث س(س + ٢) < س .

٣) أوجد مجموعة قيم ك حيث يقع المنحنى ص = (ك + ١)س^{٢} - ٣س + (ك + ١) تحت المحور السيني.

٤) أوجد مجموعة قيم س حيث س^{٢} < ٦ - ٥س .

٥) أوجد قيم ك حيث المستقيم ص = ك - ٦س مماسًّا للمنحنى ص = س(٢س + ك) .

٦) المعطى ص = ١٠ + ٣س - س^{٢} . أ) ارسم على المستوى الإحداثي المجاور المنحنى، محدّدًا إحداثيات النقاط التي يتقاطع فيها المنحنى مع المحورين. ب) احسب إحداثيات نقطة التحوّل.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى (تابع)

٧) اكتب ك بدلالة جـ علمًا أن المستقيم ص = ٣س + جـ مماس للمنحنى ص = س^{٢} + ٩س + ك .

٨) أوجد مجموعة قيم ك حيث يتقاطع المستقيم ص = ٢س - ٥ مع المنحنى ص = س^{٢} + ك س + ١١ في نقطتين مختلفتين.

٩) أوجد مجموعة قيم م حيث يتقاطع المستقيم ص = م س - ٢ مع المنحنى ص = س^{٢} + ٨س + ٧ في نقطتين مختلفتين.

١٠) أ) انسخ المستوى الإحداثي المجاور وارسم المنحنى ص = (س - ٢)(س + ٣) حيث -٥ ≤ س ≤ ٤ ، ثم أوجد إحداثيات نقاط التقاطع بين المنحنى والمحورين. ب) أوجد إحداثيات نقطة التحوّل، محدّدًا طبيعتها. ج) إذا علمت أن ك عدد ثابت موجب، فأوجد مجموعة قيم ك حيث للمعادلة (س - ٢)(س + ٣) = ك جذران مختلفان.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى (تابع ٢)

١١) أوجد قيمة ك حيث المنحنى ص = ٢س^{٢} - ٣س + ك : أ) يمرّ في النقطة (٤ ، -٧) . ب) يتقاطع مع المحور السيني في نقطة واحدة فقط.

١٢) أوجد مجموعة قيم ك حيث للمعادلة ك س^{٢} + ك = ٨س - ٢ك س جذران حقيقيان مختلفان.

١٣) أ) أوجد مجموعة قيم س حيث ٤س^{٢} + ١٩س - ٥ ≤ ٠ . ب) ١) ارسم المنحنى ص = ٩ - ٨س - س^{٢} ، محدّدًا إحداثيات كل نقاط التقاطع مع المحورين ونقطة التحوّل. ٢) اكتب القيمة العظمى لـ ٩ - ٨س - س^{٢} .

١٤) أوجد مجموعة قيم ك حيث يتقاطع المستقيم ص = ك س - ٣ مع المنحنى ص = س^{٢} - ٩س في نقطتين مختلفتين.

١٥) أوجد مجموعة قيم ك حيث يتقاطع المستقيم ص = ٢س + ك مع المنحنى ص = ١ + ٢ك س - س^{٢} في نقطتين مختلفتين.

١٦) أ) أوجد إحداثيات رأس المنحنى ص = ٤س^{٢} - ٨س + ٣ . ب) أوجد قيم العدد الثابت ك حيث المستقيم ص = ك س + ٣ مماس للمنحنى ص = ٤س^{٢} - ٨س + ٣ .

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى (تابع ٣)

١٧) منحنى معادلته ص = ٥ - ٢س + س^{٢} ومستقيم معادلته ص = ٢س + ك ، حيث ك عدد ثابت. أ) بيّن أن الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع بين المنحنى والمستقيم تحقّق المعادلة س^{٢} - ٤س + (٥ - ك) = ٠ . ب) لقيمة محدّدة للعدد ك ، يتقاطع المنحنى مع المستقيم في نقطتين مختلفتين أ ، ب ، حيث إحداثيات أ هي (-٢ ، ١٣) . أوجد إحداثيات النقطة ب . ج) في حال كان المستقيم مماسًّا للمنحنى عند النقطة جـ ، أوجد قيمة ك وإحداثيات نقطة التماس.

١٨) منحنى معادلته ص = س^{٢} - ٥س + ٧ ومستقيم معادلته ص = ٢س - ٣ . أ) أوجد إحداثيات نقاط التقاطع بين المستقيم والمنحنى. ب) أوجد مجموعة قيم س التي تحقّق المتباينة س^{٢} - ٥س + ٧ > ٢س - ٣ .

١٩) منحنى معادلته ص = ١٠اس - س^{٢} . أ) احسب إحداثيات رأس المنحنى. ب) أوجد مجموعة قيم س حيث ص ≥ ٩ .

ورقة الإجابات النموذجية: مراجعة الوحدة الأولى

---

١) ٤س^{٢} + (٨ - ٤ك)س + (٣ك - ٨) = ٠ ، المميّز < ٠ : ك^{٢} - ٧ك + ١٢ < ٠ ، ٣ < ك < ٤

٢) س^{٢} + س < ٠ ، -١ < س < ٠ | **٣)** ك + ١ < ٠ والمميّز ٩ - ٤(ك + ١)^{٢} < ٠ ، ك < -٢,٥ | **٤)** س^{٢} + ٥س - ٦ < ٠ ، -٦ < س < ١

٥) ٢س^{٢} + (ك + ٦)س - ك = ٠ ، (ك + ٦)^{٢} + ٨ك = ٠ ، ك^{٢} + ٢٠ك + ٣٦ = ٠ ، ك = -٢ أو ك = -١٨

٦) أ) التقاطع مع ص : (٠ ، ١٠) ، ومع س : (-٢ ، ٠) و (٥ ، ٠) | ب) نقطة التحوّل (١,٥ ، ١٢,٢٥) ، قيمة عظمى

٧) س^{٢} + ٦س + (ك - جـ) = ٠ ، ٣٦ - ٤(ك - جـ) = ٠ ، جـ = ك - ٩

٨) س^{٢} + (ك - ٢)س + ١٦ = ٠ ، (ك - ٢)^{٢} - ٦٤ > ٠ ، ك < ١٠ أو ك < -٦

٩) س^{٢} + (٨ - م)س + ٩ = ٠ ، (٨ - م)^{٢} > ٣٦ ، م < ٢ أو م > ١٤

١٠) أ) النقاط: (٢ ، ٠) ، (-٣ ، ٠) ، (٠ ، -٦) ، وعند الطرفين (-٥ ، ١٤) و (٤ ، ١٤) | ب) نقطة التحوّل (-٠,٥ ، -٦,٢٥) قيمة صغرى | ج) س^{٢} + س - ٦ - ك = ٠ ، ١ + ٢٤ + ٤ك > ٠ ، ك > -٦,٢٥ ، فكل ك موجبة تحقّق ذلك

١١) أ) ٣٢ - ١٢ + ك = ٠ ، ك = -٧ | ب) ٩ - ٨ك = ٠ ، ك = $\frac{٩}{٨}$

١٢) ك س^{٢} + (٢ك - ٨)س + ك = ٠ ، (٢ك - ٨)^{٢} - ٤ك^{٢} > ٠ ، ٦٤ - ٣٢ك > ٠ ، ك < ٢ مع ك ≠ ٠

١٣) أ) (٤س - ١)(س + ٥) ≥ ٠ ، -٥ ≤ س ≤ ٠٫٢٥ | ب) ا) (٠ ، ٩) ، (١ ، ٠) ، (-٩ ، ٠) ، نقطة التحوّل (-٤ ، ٢٥) | ٢) القيمة العظمى ٢٥

١٤) س^{٢} - (٩ + ك)س + ٣ = ٠ ، (٩ + ك)^{٢} > ١٢ ، ك > -٩ + ٢$\sqrt{٣}$ أو ك < -٩ - ٢$\sqrt{٣}$ (أي ك > -٥٫٥٤ أو ك < -١٢٫٤٦ تقريبًا)

١٥) س^{٢} + (٢ - ٢ك)س + (ك - ١) = ٠ ، (ك - ١)(ك - ٢) > ٠ ، ك < ١ أو ك > ٢

١٦) أ) الرأس (١ ، -١) | ب) ٤س^{٢} - (٨ + ك)س = ٠ ، (٨ + ك)^{٢} = ٠ ، ك = -٨

١٧) ب) س^{٢} - ٤س - ١٢ = ٠ ، (س - ٦)(س + ٢) = ٠ ، ك = ١٧ ، النقطة ب (٦ ، ٢٩) | ج) ١٦ - ٤(٥ - ك) = ٠ ، ك = ١ ، نقطة التماس (٢ ، ٥)

١٨) أ) س^{٢} - ٧س + ١٠ = ٠ ، (٢ ، ١) و (٥ ، ٧) | ب) ٢ < س < ٥

١٩) أ) الرأس (٥ ، ٢٥) | ب) س^{٢} - ١٠س + ٩ ≤ ٠ ، س ≥ ١ أو س ≤ ٩

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ملخص الوحدة الأولى — المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية

ملخص قوي وقصير: القوانين والقواعد وخطوات الحل، من الكتاب ومحتوى المذكرة نفسها.

أولًا: القوانين والقواعد

• الصورة العامة للدالة التربيعية: د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ، حيث أ ≠ ٠ ، ومنحناها يسمّى القطع المكافئ. إذا كانت أ < ٠ فللمنحنى نقطة صغرى، وإذا كانت أ > ٠ فللمنحنى نقطة عظمى، ونقطة الانعطاف تسمّى النقطة الحرجة (رأس المنحنى)، والمنحنى متماثل حول محور التماثل.

• التحليل إلى عوامل: إذا كان ل ك = ٠ فإن ل = ٠ أو ك = ٠ .

• إكمال المربع: س^{٢} + ب س + جـ = (س + $\frac{ب}{٢أ}$)^{٢} + جـ - $\frac{ب^{٢}}{٤أ}$ ؛

ورأس المنحنى عند س = -$\frac{ب}{٢أ}$ ، وتكون القيمة عظمى أو صغرى حسب إشارة أ .

• **نتيجة ١:** يمكن كتابة المتباينة التربيعية في الصورة أ س^{٢} + ب س + جـ □ ٠ حيث □ أحد الرموز ≤ ، ≥ ، < ، > ؛ ومجموعة الحلّ هي قيم س التي تحقّق المتباينة، ويمكن إيجادها باستخدام التمثيل البياني للدالة.

khaled-math.surge.sh

• **نتيجة ٢:** مميّز المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ هو ب^{٢} - ٤أجـ .

• **نتيجة ٣:** ب^{٢} - ٤أجـ > ٠ : جذران حقيقيان مختلفان (نقطتا تقاطع) ؛ ب^{٢} - ٤أجـ = ٠ : جذران متساويان (المستقيم مماس) ؛ ب^{٢} - ٤أجـ < ٠ : لا جذور حقيقية (لا تقاطع).

ثانيًا: أهم الدروس

• ١-١ حلّ المعادلات التربيعية بالتحليل إلى عوامل: أعد ترتيبها في الصورة العامة ثم حلّل واستخدم خاصية الصفر.

• ١-٢ القيم العظمى والقيم الصغرى: أكمل المربع لتحديد الرأس، وحدّد النوع من إشارة أ — أساس المسائل الكلامية (أكبر مساحة، أقصى ارتفاع، أقصى ربح).

• ١-٣ المتباينات التربيعية: اجعل الطرف الآخر صفرًا، حلّل، وحدّد مجموعة الحل من الإشارة أو التمثيل البياني.

• ١-٤ جذور المعادلة التربيعية: طبيعة الجذور من المميّز، وإيجاد قيم الثوابت المجهولة.

• ١-٥ حلّ المعادلات الآنية (خطية وتربيعية): عبّر عن أحد المتغيّرين من المعادلة الخطية وعوّض في التربيعية، وتحقّق من النواتج.

• ١-٦ التقاطع بين مستقيم ومنحنى: ساوِ الدالتين وافحص مميّز المعادلة الناتجة (تقاطعان / مماس / لا تقاطع).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ثالثًا: أهم المسائل في المذكرة

• أمثلة ١-١ (التحليل إلى عوامل مع إعادة الترتيب والقسمة على العامل المشترك) وتمارين ١-١.

• أمثلة ١-٢ (إكمال المربع والقيم العظمى والصغرى وإحداثيات رأس المنحنى) وتمارين ١-٢.

• مثال ١١ (حلّ المتباينة $س^{٢} - ٣س - ٤ > ٠$) وتمارين ١-٣.

• أمثلة المميّز في ١-٤ (طبيعة الجذور وقيم الثوابت) وتمارين ١-٤.

• أمثلة ١-٥ و ١-٦ (المعادلات الآنية، ونقاط التقاطع والمماس) وتمارينهما.

أهم المسائل — مراجعة نهاية الوحدة:

• مراجعة نهاية الوحدة (س١-٣٣): خصوصًا المسائل الكلامية س٢٠-٢٣ (ارتفاع كرة، ارتفاع طائر، أكبر مساحة غرفة، أكبر ربح) وس٦ وس١٠ (رسم المنحنى وإحداثيات التقاطع مع المحورين).

رابعًا: مسائل متوقَّعة في الاختبار — توقّع استرشادي من الكتاب والمنهج فقط، وليست معلومة مؤكّدة عن الامتحان:

• مسألة كلامية على القيمة العظمى أو الصغرى (أكبر مساحة، أقصى ارتفاع، أقصى ربح) بإكمال المربع أو باستخدام

$$س = -\frac{ب}{٢أ} .$$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

- إيجاد قيمة ثابت (ك أو ل) تجعل للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين / متساويين، أو تجعل المستقيم مماسًّا للمنحنى.
- حلّ متباينة تربيعية وكتابة مجموعة حلّها.
- حلّ معادلتين آنيتين (خطية وتربيعية) وإيجاد إحداثيات نقاط التقاطع.
- رسم منحنى دالة تربيعية محدّدًا الرأس ونقاط التقاطع مع المحورين.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh