٢-١ تعريف الدوال ومجالها ومداها

الدالة علاقة بين مجموعتين يرتبط فيها كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية. قد تكون الدالة **واحد إلى واحد** أو **متعدّد إلى واحد**. أمّا العلاقة **واحد إلى متعدّد** أو **متعدّد إلى متعدّد** فليست دالة.

تُسمّى مجموعة المدخلات **مجال** الدالة، وتُسمّى مجموعة المخرجات **مدى** الدالة.

اختبار الخط الرأسي: إذا قطع أيّ خط رأسي المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر فالمنحنى يمثّل دالة. **اختبار الخط الأفقي:** إذا قطع أيّ خط أفقي المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر فالدالة واحد إلى واحد، وإذا قطعه في أكثر من نقطة فهي متعدّد إلى واحد.

مثال ١

حدّد أيّ المعادلات الآتية تمثّل دالة، وإن كانت دالة فهل هي واحد إلى واحد أم متعدّد إلى واحد: ب) $ص = س^{٢} - ٤$
جـ) $س + ص = ٣$ د) $س^{٢} - ص^{٢} = ٤$

الحلّ

ب) ص = س^{٢} - ٤ : دالة، متعدّد إلى واحد (كل من س و -س يعطي القيمة نفسها).

ج) س + ص = ٣ : دالة، واحد إلى واحد.

د) س^{٢} - ص^{٢} = ٤ : ليست دالة (للقيمة الواحدة من س قيمتان لـ ص).

١-٢ أمثلة ٢ و ٣

مثال ٢

علاقة تربط كل طالب باليوم الذي يوافق عيد ميلاده من أيام الأسبوع. هذه العلاقة دالة متعدّد إلى واحد (قد يشترك طالبان في اليوم نفسه). المجال: أسماء الطلاب، والمدى: أيام الأسبوع المرتبطة بهم.

مثال ٣

أوجد مدى الدالة د(س) = ٥ - ٢س ، حيث -٤ ≤ س ≤ ٥ .

الحلّ

د(-٤) = ٥ + ٨ = ١٣ ، د(٥) = ٥ - ١٠ = -٥ . الدالة خطية متناقصة، فالمدى: -٥ ≤ د(س) ≤ ١٣ .

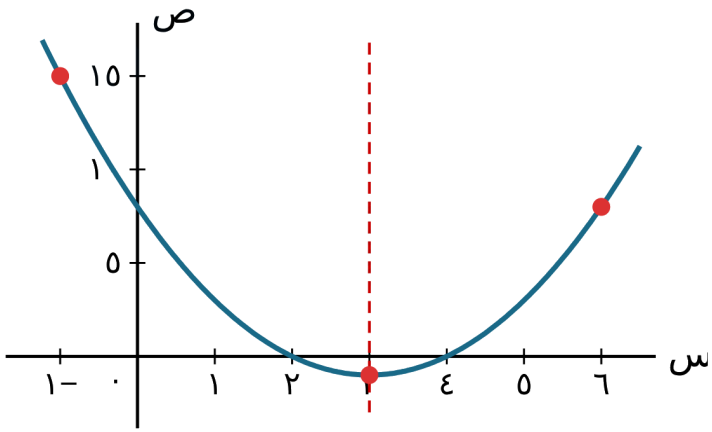
مثال ٤

أوجد مدى الدالة د(س) = س^{٢} - ٦س + ٨ ، حيث -١ ≤ س ≤ ٦ .

الحلّ

د(س) = (س - ٣)^{٢} - ١ ، النقطة الصغرى (٣ ، -١) . د(-١) = ١٥ ، د(٦) = ٨ . أكبر قيمة ١٥ وأصغر قيمة -١ .

المدى: -١ ≤ د(س) ≤ ١٥



١-٢ مثال ٥

مثال ٥

تُحسب فاتورة الكهرباء ك (بالريالات) لمنزل بالدالة ك(م) = ٢٥٠٠ + ٥٠٠م ، حيث م عدد الأشهر ، ٢ ≤ م ≤ ٨ . أوجد مدى الدالة وفسّره.

الحلّ

ك(٢) = ٢٥٠٠ + ١٠٠٠ = ٣٥٠٠ ، ك(٨) = ٢٥٠٠ + ٤٠٠٠ = ٦٥٠٠ .

المدى: ٣٥٠٠ ≤ ك ≤ ٦٥٠٠ ، أي أن الفاتورة تتراوح بين ٣٥٠٠ و ٦٥٠٠ ريال.

تمارين ١-٢

١) أيّة معادلة من المعادلات الآتية تمثّل دالة؟ حدّد ما إذا كانت واحد إلى واحد أو متعدّد إلى واحد:

أ) ص = ٢س - ٣ ، س ∈ ح

ب) ص = س^{٢} - ٣ ، س ∈ ح

ج) ص = ٣س^{٢} + ٤ ، س ∈ ح ، س ≤ ٠

٢) استخدم برمجيات الرسم لتحدّد أيّة معادلة من المعادلات الآتية تمثل دالة. اذكر ما إذا كانت الدالة واحد إلى واحد أو متعدّد إلى واحد:

أ) ص = ٢س^{٣} - ١ ، س ∈ ح

ب) ص = ٢س$^{-}$ ، س ∈ ح

ج) ص = $\frac{١٠}{س}$ ، س ∈ ح ، س > ٠

د) ص = $\sqrt{س}$ ، س ∈ ح ، س ≤ ٠

هـ) ص^{٢} = ٤س ، س ∈ ح

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٣) في كل موقف من المواقف الآتية، صف نوع الدالة التي تربط المجال بالمدى:

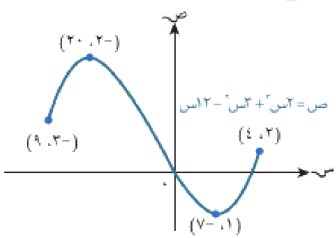
أ) المجال: المسافرون في المطار — المدى: وجهة السفر.

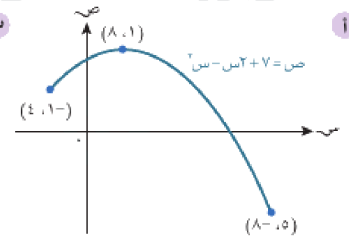
ب) المجال: المرضى في عيادة الطبيب — المدى: المواعيد لدى الطبيب.

ج) المجال: المسافرون في الطائرة — المدى: المقاعد داخل الطائرة.

تمارين ٢-١ (تابع ١)

٤) حدّد المجال والمدى لكل دالة من الدالتين الممثّلتين بالمنحنيين الآتيين:





٥) حدّد مدى كل دالة من الدوال الآتية:

أ) د(س) = س + ٤ حيث س < ٨

ب) د(س) = ٢س - ٧ حيث -٣ ≤ س ≤ ٢

ج) د(س) = ٧ - ٢س حيث -١ ≤ س ≤ ٤

د) د : س ← ٢س^{٢} حيث ١ ≤ س ≤ ٤

هـ) د(س) = س^{٢} - ٢ حيث س ∈ ح

تمارين ٢-١ (تابع ٢)

٦) ارسم منحنى كل دالة تربيعية من الدوال الآتية، ثم حدّد مدى كل منها (مساعدة: لتحديد مدى هذه الدوال ارسمها في مجالها المحدد):

أ) ص = س^{٢} + ٤س - ١٢ ، حيث س ∈ ح

ب) ص = ١٦ - س^{٢} ، حيث س ∈ ح ، س ≥ -١

ج) ص = ٢س^{٢} + ٩س + ٧ ، حيث -٤ ≤ س < ٠

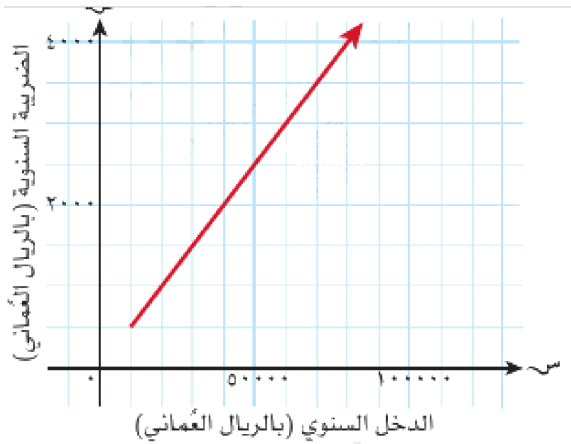
د) ص = -١٠ - ٣س - س^{٢} ، حيث س ≤ ٠

٧) د(س) = س^{٢} - ٢س - ٣ حيث س ∈ ح ، أ ≤ س ≤ ب . أوجد قيمة كل من أ ، ب إذا كان مدى الدالة هو -٤ ≤ د(س) ≤ ٥ .

تمارين ٢-١ (تابع ٣)

٨) يمثّل التمثيل البياني أدناه ما يدفعه أحمد كضريبة جديدة على الدخل.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh



أ) ما مجال الدالة ومداها؟ ب) فسّر المجال ضمن سياق المسألة.

٩) يعتمد إيجار سيارة الأجرة (ك) على رسم ثابت قيمته ٢ ريال عُماني إضافة إلى ٠,٢٨ ريال عُماني لكل كيلومتر تجتازه السيارة.

أ) اكتب دالة الكلفة ك لإيجار السيارة عندما تجتاز السيارة س كيلومترات. ب) أوجد مجال الدالة ك ومداها.

ورقة الإجابات النموذجية ٢-١

تمرين ١: أ) دالة، واحد إلى واحد | ب) دالة، متعدّد إلى واحد | ج) دالة، واحد إلى واحد (س ≤ ٠)

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمرين ٢: أ) دالة، واحد إلى واحد | ب) دالة، واحد إلى واحد | ج) دالة، واحد إلى واحد | د) دالة، واحد إلى واحد | هـ) ليست دالة (واحد إلى متعدّد)

تمرين ٣: أ) متعدّد إلى واحد | ب) واحد إلى واحد (لكل مريض موعد واحد مختلف) | ج) واحد إلى واحد (لكل مسافر مقعد واحد)

تمرين ٤: أ) المجال −١ ≤ س ≤ ٥ ، المدى −٨ ≤ ص ≤ ٨ | ب) المجال −٣ ≤ س ≤ ٢ ، المدى −٧ ≤ ص ≤ ٢٠

تمرين ٥: أ) د(س) > ١٢ | ب) −١٣ ≤ د(س) ≤ −٣ | ج) −١ ≤ د(س) ≤ ٩ | د) ٢ ≤ د(س) ≤ ٣٢ | هـ) د(س) ≤ −٢

تمرين ٦: أ) ص ≤ −١٦ (النقطة الصغرى (−٢ ، −١٦)) | ب) ص ≥ ١٥ | ج) −٣,١٢٥ ≤ ص < ٧ | د) ص ≥ ١٠

تمرين ٧: النقطة الصغرى (١ ، −٤) ، و د(س) = ٥ عندما س = −٢ أو س = ٤ . إذن (أ = −٢ و ١ ≤ ب ≤ ٤) أو (ب = ٤ و −٢ ≤ أ ≤ ١) ، وأبسط حالة: أ = −٢ ، ب = ٤ .

تمرين ٨: قراءة تقريبية من الرسم: المجال س ≤ نحو ١٠٠٠٠ ريال (بلا حدّ أعلى، يدلّ السهم)، والمدى ص ≤ نحو ٤٠٠ ريال. التفسير: الضريبة الجديدة تُطبّق على من دخله السنوي لا يقل عن نحو ١٠٠٠٠ ريال.

تمرين ٩: أ) ك(س) = ٢ + ٠٫٢٨س | ب) المجال س ≤ ٠ ، المدى ك ≤ ٢

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٢-٢ الدوال المركبة

(د ∘ هـ)(س) تعني إجراء الدالة هـ بدل س في د، أي د(هـ(س)). تكون (د ∘ هـ)(س) موجودة فقط عندما يكون مدى هـ متضمَّنًا في مجال د. وبصورة عامة (د ∘ هـ)(س) ≠ (هـ ∘ د)(س).

مثال ٦

د(س) = ٢س + ٣ ، هـ(س) = س^{٢} - ١ . أوجد: (د ∘ هـ)(س) و (هـ ∘ د)(س) و (د ∘ د)(س).

الحلّ

(د ∘ هـ)(س) = ٢(س^{٢} - ١) + ٣ = ٢س^{٢} + ١

(هـ ∘ د)(س) = (٢س + ٣)^{٢} - ١ = ٤س^{٢} + ١٢س + ٨

(د ∘ د)(س) = ٢(٢س + ٣) + ٣ = ٤س + ٩

٢-٢ أمثلة ٧ و ٨ و ٩

مثال ٧

د(س) = (س - ٤)^{٢} - ١ ، هـ(س) = $\frac{٢س + ٣}{س - ٢}$. أوجد (د ∘ هـ)(٤) .

الحلّ

هـ(٤) = $\frac{١١}{٢}$ = ٥,٥ ، د(٥,٥) = (١,٥)^{٢} - ١ = ١,٢٥ = $\frac{١}{٤}$

مثال ٨

د(س) = $\frac{٥}{س - ٤}$ ، هـ(س) = ٣ - س^{٢} . أوجد (د ∘ هـ)(س) و (د ∘ د)(س).

الحلّ

(د ∘ هـ)(س) = $\frac{٥}{(٣ - س^{٢}) - ٤}$ = $\frac{-٥}{س^{٢} + ١}$

(د ∘ د)(س) = $\frac{٥(س - ٤)}{٥ - ٤(س - ٤)}$ = $\frac{٥س - ٢٠}{٢١ - ٤س}$

مثال ٩

ك(ن) = ٢ + ١,٨ان ، ع(ل) = ٠,٤ل . أوجد (ع ∘ ك)(ن) .

الحلّ

(ع ∘ ك)(ن) = ٠,٤(٢ + ١,٨ان) = ٠,٨ + ٠,٧٢ن

تمارين ٢-٢

ا) إذا علمت أن د : س ← ٢س + ٣ ، هـ : س ← س^{٢} - ١ ، حيث س ∈ ح ، فأوجد: أ) (د ∘ هـ)(٢) ب) (هـ ∘ د)(٥) .

٢) إذا كانت د(س) = (س + ٢)^{٢} - ١ ، حيث س ∈ ح ، فأوجد (د ∘ د)(٣) .

٣) إذا كانت د(س) = س^{٢} + ٦ ، حيث س ∈ ح ،
هـ(س) = $\sqrt{س + ٣}$ - ٢ ، حيث س ∈ ح ، س ≤ -٣ ، فأوجد: أ) (د ∘ هـ)(٦) ب) (هـ ∘ د)(٤) ج) (د ∘ د)(-٣) .

٤) إذا كانت ع : س ← س + ٥ حيث س ∈ ح ، س > ٠ ،
ل : س ← $\sqrt{س}$ حيث س ∈ ح ، س > ٠ ، فاكتب كل دالة من الدوال الآتية في صورة دالة مركبة، مستخدمًا الدالة ع أو الدالة ل أو كلتيهما: أ) س ← $\sqrt{س}$ + ٥ ب) س ← $\sqrt{س + ٥}$ ج) س ← س + ١٠

٥) إذا علمت أن د : س ← ٢س + ٣ ، حيث س ∈ ح ، س ≠ -١ ، هـ : س ← $\frac{١٢}{س - ١}$ ، حيث س ∈ ح ، س ≠ ١ ، فأ) أوجد (هـ ∘ د)(س) إن أمكن ذلك. ب) حلّ المعادلة (هـ ∘ د)(س) = ٢ .

تمارين ٢-٢ (تابع)

٦) إذا علمت أن هـ(س) = س^{٢} - ٢ ، حيث س ∈ ح ،
ل(س) = ٢س + ٥ ، حيث س ∈ ح ، فأ) أوجد (هـ ∘ ل)(س) إن أمكن ذلك. ب) حلّ المعادلة (هـ ∘ ل)(س) = ١٤ .

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٧) إذا كانت د : س ← س^{٢} حيث س ∈ ح ، هـ : س ← س + ١ حيث س ∈ ح ، فاكتب كلّ دالة من الدوال الآتية في صورة دالة مركبة، مستخدمًا الدالة د أو الدالة هـ أو كليهما: أ) س ← (س + ١)^{٢} ب) س ← س^{٢} + ١ ج) س ← س + ٢ د) س ← س^{٤}

٨) إذا علمت أن د(س) : س^{٢} - ٥س حيث س ∈ ح ، هـ(س) = ٢س + ٣ حيث س ∈ ح ، فأ) أوجد (د ∘ هـ)(س) . ب) أوجد مدى الدالة (د ∘ هـ)(س) .

٩) تمثّل الدالة ك(ن) = ٢ + ٤ن دالة الكلفة لإنتاج ن قطعة من سلعة ما. ولكل س ريال عُماني تمّ صرفه، يتمّ احتساب الربح باستخدام الدالة ر(س) = ٠٫٢س . أوجد (ر ∘ ك)(ن) .

١٠) تمثّل الدالة ع(ن) = ٣٠ن + ٤٩٠ الارتفاع فوق مستوى سطح البحر ع (بالأمتار) لمتسلق جبال حيث كان يتسلق لمدة ن ساعة. ودرجة الحرارة د (بالدرجة السيليزية) لكل س متر فوق سطح البحر تتمثّل بالدالة د(س) = ٢٠ - $\frac{\text{٢س}}{\text{٣٠٠}}$. أوجد (د ∘ ع)(ن) .

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٢

١: أ) هـ(٢) = ٣ ، د(٣) = ٩ | ب) د(٥) = ١٣ ، هـ(١٣) = ١٦٨

٢: د(٣) = ٢٤ ، د(٢٤) = ٦٧٥

٣: أ) هـ(٦) = ١ ، د(١) = ٧ | ب) د(٤) = ٢٢ ، هـ(٢٢) = ٣ | ج) د(-٣) = ١٥ ، د(١٥) = ٢٣١

٤: أ) ع ∘ ل | ب) ل ∘ ع | ج) ع ∘ ع

٥: أ) (هـ ∘ د)(س) = $\frac{١٢}{٢س + ٢} = \frac{٦}{س + ١}$ (موجودة لأن

٢س + ٣ = ١ تعطي س = -١ المستبعدة) | ب) $\frac{٦}{س + ١}$ = ٢ ،

س = ٢

٦: أ) (هـ ∘ ل)(س) = (٢س + ٥)^{٢} - ٢ = ٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٣ |

ب) (٢س + ٥)^{٢} = ١٦ ، س = -٠,٥ أو س = -٤,٥

٧: أ) د ∘ هـ | ب) هـ ∘ د | ج) هـ ∘ هـ | د) د ∘ د

٨: أ)

(د ∘ هـ)(س) = (٢س + ٣)^{٢} - ٥(٢س + ٣) = ٤س^{٢} + ٢س - ٦ |

ب) النقطة الصغرى عند س = -٠,٢٥ ، قيمتها -٦,٢٥ ، المدى

≤ -٦,٢٥

٩: (ر ∘ ك)(ن) = ٠,٢(٢ + ٤ن) = ٠,٤ + ٠,٨ن

١٠:

(د ∘ ع)(ن) = ٢٠ - $\frac{٢(٣٠ن + ٤٩٠)}{٣٠٠} = \frac{٢٥١}{١٥}$ - ٠,٢ن ≈ ١٦,٧٣٣ - ٠,٢ن

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٣-٢ الدوال العكسية

الدالة العكسية د$^{-١}$(س) هي دالة تعكس ما تقوم به الدالة د(س). (د ∘ د$^{-١}$)(س) = (د$^{-١}$ ∘ د)(س) = س . مجال د$^{-١}$(س) هو مدى د(س) ، ومدى د$^{-١}$(س) هو مجال د(س). يمكن إيجاد الدالة العكسية فقط إذا كانت د(س) دالة واحد إلى واحد. **الخطوة ١:** اكتب الدالة في صورة ص = ... **الخطوة ٢:** بادل بين المتغيّرين س ، ص . **الخطوة ٣:** أوجد ص بدلالة س.

مثال

هـ(س) = $\frac{١}{٤س + ٢}$. ص = $\frac{١}{٤س + ٢}$ ، نبدّل:

س = $\frac{١}{٤ص + ٢}$ ، ٤ص + ٢ = $\frac{١}{س}$ ، فتكون

هـ$^{-١}$(س) = $\frac{١}{٤س}$ - $\frac{١}{٢}$

إذا كانت د(س) = د$^{-١}$(س) فتُسمّى الدالة د عكسية لنفسها، وعندها (د ∘ د)(س) = س .

٣-٢ أمثلة ١٠ و ١١

مثال ١٠

د(س) = ٥س - ٣ ، س ≤ ٠ . أوجد د$^{-١}$(س) .

الحلّ

ص = ٥س - ٣ ، س = ٥ص - ٣ ، ص = $\frac{\text{س} + ٣}{٥}$ ، فتكون

د$^{-١}$(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{٥}$ ، س ≤ -٣ .

مثال ١١

تسافر منى بالسيارة بمعدل ثابت. تمثّل الدالة الآتية المسافة م (بالكيلومترات) من منزل منى بعد ن (٠ ≤ ن ≤ ٣) (ساعات): م(ن) = ١٢٠ - ٤٠ن .

أ) أوجد م$^{-١}$. ب) فسّر ما تعنيه الدالة م$^{-١}$ في سياق المسألة.

ج) أوجد الزمن الذي تستغرقه منى لتكون على بعد ٤٠ كيلومترًا من منزلها مباشرة.

الحلّ

أ) ص = ١٢٠ - ٤٠ن ، ن = ١٢٠ - ٤٠ص ، ٤٠ص = ١٢٠ - ن ، فتكون

$$م^{-١}(ن) = \frac{١٢٠ - ن}{٤٠}$$

ب) تدلّنا $م^{-١}$ على الزمن الذي استغرقته منى عند قطع مسافة ن كيلومترات من منزلها.

ج) $م^{-١}(٤٠) = \frac{١٢٠ - ٤٠}{٤٠}$ = ٢ ساعة (استغرقت منى ساعتين).

تمارين ٢-٣

١) أوجد $د^{-١}(س)$ لكل دالة من الدوال الآتية:

أ) د(س) = ٥س - ٨ حيث س ∈ ح

ب) د(س) = $س^{٢}$ + ٣ حيث س ∈ ح ، س ≤ ٠

ج) د(س) = $(س - ٥)^{٢}$ + ٣ حيث س ∈ ح ، س ≥ ٥

د) $د(س) = \frac{٨}{٣ - س}$ حيث س ∈ ح ، س ≠ ٣

٢) إذا كانت د : س ← $س^{٢}$ + ٤س حيث س ∈ ح ، س ≥ -٢ ، فأوجد مدى د(س) ، أي مجال $د^{-١}(س)$. ب) أوجد مدى $د^{-١}(س)$. (مساعدة: ارسم منحنى الدالة التربيعية لتحدد نقطة التحوّل).

٣) إذا كانت د : س ← $\frac{٥}{١ + ٢س}$ حيث س ∈ ح ، س ≤ ٢ ، فأوجد مدى د(س) ، أي مجال $د^{-١}(س)$. ب) أوجد $د^{-١}(س)$.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

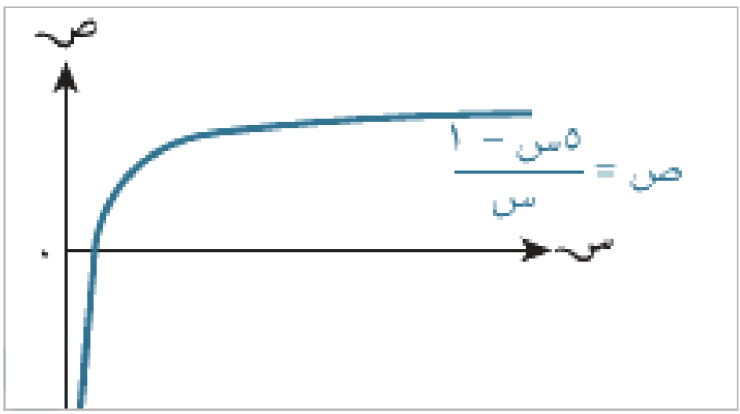
٤) إذا كانت د : س ← س^{٢} - ٦س حيث س ∈ ح ، فأوجد مدى الدالة د .

٥) إذا كانت د(س) = ٣س - ٢٤ حيث س ≥ ٠ ، اكتب مدى د$^{-١}$.

تمارين ٣-٢ (تابع)

٦) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالة ص = د$^{-١}$(س) ، حيث

د$^{-١}$(س) = $\frac{٥س - ١}{س}$ ، لكل س ∈ ح ، ٠ < س ≥ ٣ . أوجد د(س).



٧) تتمثّل الكلفة ك (بمئات الريالات العُمانية) لإنتاج س سلعة بالدالة ك(س) = ٠,٢س + ١ . تشير الدالة العكسية ك$^{-١}$(س) إلى عدد السلع التي يمكن إنتاجها لكمية محددة من الأموال. أوجد هذه الدالة.

٨) يُملأ خزان مياه حتى ارتفاع ع سم من صنبور ماء جارٍ بكمّية ضخٍّ ثابتة. تمثّل الدالة أدناه ارتفاع الماء في الخزان في الزمن ن (ثانية) منذ تشغيل الصنبور: ع(ن) = ٠٫٢ن . أ) أوجد $ع^{-١}$(ن). ب) فسّر المقصود من الدالة $ع^{-١}$ في سياق المسألة، واذكر الصيغة المناسبة لها.

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٣

١: أ) $د^{-١}(س) = \frac{س + ٨}{٥}$ | ب) $د^{-١}(س) = \sqrt{س - ٣}$ ، س ≤ ٣ | ج) $د^{-١}(س) = ٥ - \sqrt{س - ٣}$ ، س ≤ ٣ | د) $د^{-١}(س) = ٣ - \frac{٨}{س}$ ، س ≠ ٠

٢: د(س) = $(س + ٢)^{٢}$ - ٤ ، أ) المدى د(س) ≤ -٤ ، فمجال $د^{-١}$ هو س ≤ -٤ | ب) $د^{-١}(س) = -٢ - \sqrt{س + ٤}$ ، مداها $د^{-١}(س) ≥ -٢$

٣: أ) د(٢) = ١ والدالة متناقصة نحو ٠ ، فالمدى ٠ < د(س) ≥ ١ ، أي مجال $د^{-١}$ هو ٠ < س ≤ ١ | ب) $د^{-١}(س) = \frac{٥ - س}{٢س}$

٤: د(س) = $(س - ٣)^{٢}$ - ٩ ، المدى د(س) ≤ -٩

٥: مدى $د^{-١}$ هو مجال د : س ≥ ٠

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٦: ص = $\frac{٥س - ١}{س}$ ، بالتبديل: س ص = ٥ص - ١ ،

ص(س - ٥) = -١ ، فتكون د(س) = $\frac{١}{٥ - س}$ ، مجالها س ≥ $\frac{١٤}{٣}$

(مدى $د^{-١}$) ومداها ٠ < د(س) ≤ ٣

٧: $ك^{-١}$(س) = $\frac{س - ١}{٠,٢}$ = ٥س - ٥ ، س ≤ ١

٨: أ) $ع^{-١}$(ن) = ٥ن | ب) تدلّ على الزمن (بالثواني) الذي يلزم ليصل ارتفاع الماء إلى ن سم ، أي ن = ٥ع

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٤-٢ منحنى الدالة ومنحنى دالتها العكسية

نتيجة ١١: منحنى $د^{-١}$(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) حول المستقيم ص = س . **نتيجة ١٢:** يكون منحنى الدالة العكسية لنفسها متماثلًا حول المستقيم ص = س .

مثال ١٢

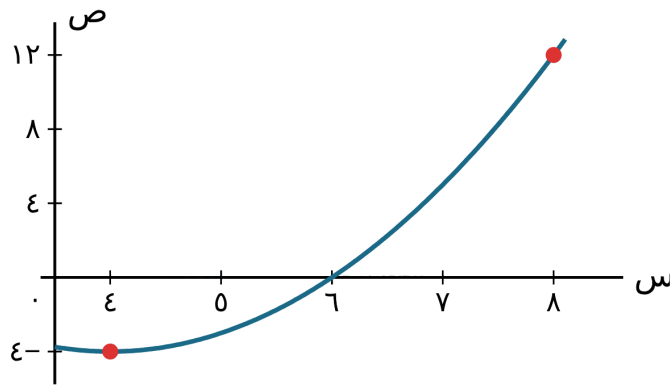
د(س) = $س^{٢}$ - ٨س + ١٢ ، ٤ ≤ س ≤ ٨ . أوجد $د^{-١}$ وارسم المنحنيين.

الحلّ

د(س) = (س - ٤)^{٢} - ٤ ، د(٤) = -٤ ، د(٨) = ١٢ .

ص + ٤ = (س - ٤)^{٢} ، فتكون د$^{-١}$(س) = ٤ + $\sqrt{\text{س} + ٤}$ ،

مجالها -٤ ≤ س ≤ ١٢ .



مثال ١٣

د(س) = $\frac{٢\text{س} + ٧}{\text{س} - ٢}$ ، س ≠ ٢ . بيّن أن د عكسية لنفسها.

الحلّ

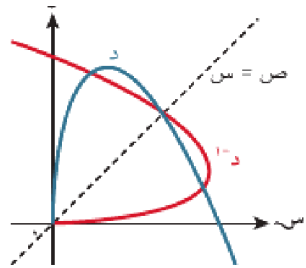
(د ∘ د)(س) = $\frac{٢(٢\text{س} + ٧) + ٧(\text{س} - ٢)}{(٢\text{س} + ٧) - ٢(\text{س} - ٢)}$ = $\frac{١١\text{س}}{١١}$ = س ،

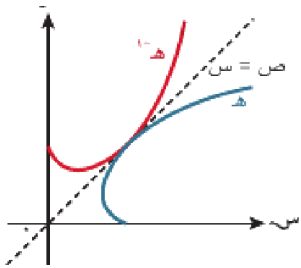
فالدالة عكسية لنفسها

ومنحناها متماثل حول ص = س .

استكشاف ٣

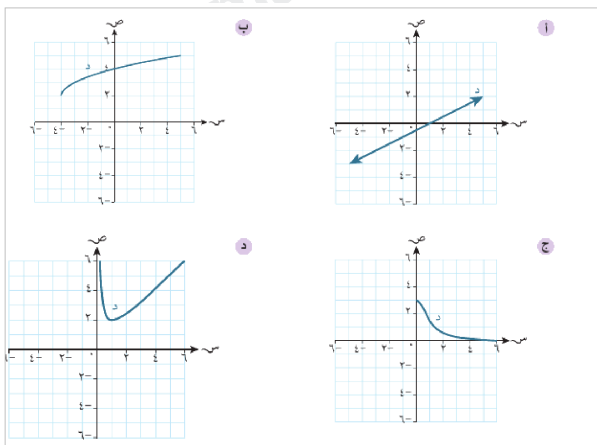
تقول شهد ما يأتي: يبيّن الشكلان الدالتين د ، هـ معًا مع الدالة العكسية لكل منهما $د^{-1}$ ، $هـ^{-1}$. هل ما تقوله شهد صحيح؟ اشرح إجابتك.





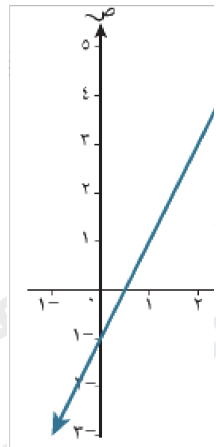
تمارين ٢-٤

١) في كل حالة من الحالات الآتية، ارسم منحنى $د^{-1}(س)$ على المستوى الإحداثي نفسه إن وجد:



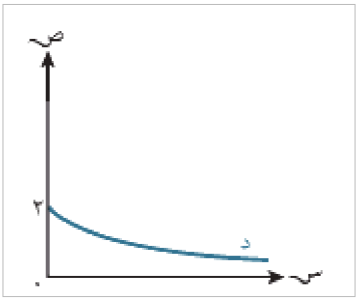
تمارين ٢-٤ (تابع)

٢) إذا كانت د : س ← ٢س - ١ حيث س ∈ ح ، -١ ≤ س ≤ ٣ . أ) أوجد $د^{-1}$(س). ب) حدّد مدى د(س) ، أي مجال $د^{-1}$(س). ج) أوجد مدى $د^{-1}$(س). د) انسخ الشكل وارسم منحنى ص = $د^{-1}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه، موضحًا العلاقة بين المنحنيين.



٣) يبيّن الشكل المجاور منحنى ص = د(س) عندما

د(س) = $\frac{٤}{س + ٢}$ ، حيث س ∈ ح ، س ≥ ٠ . أ) حدّد مدى د(س) ، أي مجال $د^{-1}$(س). ب) أوجد $د^{-1}$(س). ج) أوجد مدى $د^{-1}$(س). د) انسخ الشكل وارسم منحنى ص = $د^{-1}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه، موضحًا العلاقة بين المنحنيين.



ورقة الإجابات النموذجية ٢-٤

استكشاف ٣: سؤال نقاشي في الكتاب، لم أضع له إجابة نموذجية في هذه الورقة.

١: أ) و ب) و ج) واحد إلى واحد فتوجد $د^{-١}$ ويُرسم بانعكاس نقاط المنحنى حول ص = س (تتبادل الإحداثيتان في كل نقطة، وتتبادل نقطتا البداية والنهاية) | د) المنحنى ينزل ثم يصعد (متعدّد إلى واحد) فلا توجد $د^{-١}$

٢: أ) $د^{-١}(س) = \frac{س + ١}{٢}$ | ب) -٣ ≤ س ≤ ٥ | ج) $-١ \leq د^{-١}(س) \leq ٣$ | د) يمرّ منحنى $د^{-١}$ بالنقطتين (-٣ ، -١) و (٥ ، ٣) وهما انعكاس (-١ ، -٣) و (٣ ، ٥) حول ص = س

٣: أ) ٠ < د(س) ≤ ٢ | ب) د$^{-١}$(س) = $\frac{٤}{س}$ - ٢ | ج) د$^{-١}$(س) ≤ ٠ | د) يمرّ منحنى د$^{-١}$ بالنقطة (٢ ، ٠) وينعكس حول ص = س

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية

١) إذا كانت د دالة معرفة كالآتي: د(س) = س^{٢} - ١ حيث ١٠- ≤ س ≤ ٨ : أ) أوجد مدى د ب) اكتب مجالًا مناسبًا للدالة د حيث تكون الدالة د$^{-١}$ موجودة.

٢) إذا كانت الدالتان د ، هـ معرّفتين لكل قيم س الحقيقية كالآتي: د(س) = ٣ - $\sqrt{س - ١}$ حيث س > ١ ،

هـ(س) = $\frac{س - ٢}{٣ - ٢س}$ حيث س < ٢ : أ) أوجد (هـ ٥ د)(٣٧). ب) أوجد د$^{-١}$(س). ج) أوجد ه$^{-١}$(س).

٣) إذا كانت الدالة هـ معرّفة كالآتي: هـ(س) = $\frac{١}{١ - ٢س}$ حيث ١ ≤ س ≤ ٣ : أ) أوجد مدى الدالة هـ. ب) أوجد ه$^{-١}$(س). ج) اكتب مجال ه$^{-١}$(س).

٤) أ) إذا كانت الدالتان د ، هـ معرّفتين حيث س ∈ ح :
د : س ← ٢س + ٣ ، هـ : س ← س^{٢} - ١ ، فأوجد (د ٥ هـ)(٤).
ب) إذا كانت الدالتان ع ، ل معرّفتين حيث س > ٠ كالآتي:
ع : س ← س + ٤ ، ل : س ← $\sqrt{س}$ ، فاكتب كل دالة من الدوال الآتية بدلالة دوال مركبة من الدالتين ع ، ل: ١) س ← $\sqrt{س + ٤}$ ٢) س ← س + ٨

ورقة الإجابات النموذجية للمراجعة

١: أ) النقطة الصغرى (٠ ، -١) ، د(-١٠) = ٩٩ ، د(٨) = ٦٣ ، المدى -١ ≤ د(س) ≤ ٩٩ | ب) مجال مناسب: ٠ ≤ س ≤ ٨ (الدالة تصبح واحد إلى واحد)

٢: أ) د(٣٧) = ٣ - ٦ = -٣ ، هـ(-٣) = $\frac{-٥}{٩}$ | ب) د$^{-١}$(س) = (٣ - س)^{٢} + ١ ، س < ٣ | جـ) ه$^{-١}$(س) = $\frac{٣س + ٢}{٢س + ١}$

٣: هـ(١) = -١ ، هـ(٣) = $\frac{-١}{٥}$ | أ) -١ ≤ هـ(س) ≤ -$\frac{١}{٥}$ | ب) ه$^{-١}$(س) = $\frac{س - ١}{٢س}$ | جـ) -١ ≤ س ≤ -$\frac{١}{٥}$

٤: أ) هـ(٤) = ١٥ ، د(١٥) = ٣٣ | ب) ١) ل ٥ ع | ٢) ع ٥ ع

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ملخص الوحدة الثانية — الدوال

ملخص قوي وقصير: القوانين والقواعد وخطوات الحل، من ملخص الكتاب (قائمة التحقّق من التعلّم والفهم) بنصّه.

أولًا: القوانين والقواعد (من قائمة التحقّق في الكتاب بنصّها)

• الدالة هي علاقة بين مجموعتين بحيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.

• قد تكون الدالة واحد إلى واحد أو متعدّد إلى واحد.

• تُسمّى مجموعة المدخلات مجال الدالة.

• تُسمّى مجموعة المخرجات مدى الدالة.

تركيب الدوال:

• (د ∘ هـ)(س) تعني إجراء الدالة هـ بدل س في د ، ثم إجراء د على الناتج.

• تكون (د ∘ هـ)(س) موجودة (فقط) عندما يكون مدى هـ متضمَّنًا في مجال د.

• بصورة عامة، (د ∘ هـ)(س) ≠ (هـ ∘ د)(س).

الدوال العكسية:

• الدالة العكسية للدالة د(س) هي دالة تعكس ما تقوم به الدالة د(س).

• (د ∘ د$^{-1}$)(س) = (د$^{-1}$ ∘ د)(س) = س ؛ أو إذا ص = د(س) فإن س = د$^{-1}$(ص).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

• تُكتب الدالة العكسية للدالة د(س) في صورة $د^{-1}$(س).

• **خطوات إيجاد الدالة العكسية:** الخطوة ١: اكتب الدالة في صورة ص = ؛ الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرين س ، ص ؛ الخطوة ٣: أوجد ص بدلالة س.

• مجال $د^{-1}$(س) هو مدى د(س) ، ومدى $د^{-1}$(س) هو مجال د(س).

• يمكن إيجاد الدالة العكسية $د^{-1}$(س) إذا كانت د(س) دالة واحد إلى واحد فقط.

• منحنى $د^{-1}$(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) حول المستقيم ص = س.

• إذا كان د(س) = $د^{-1}$(س) فتسمّى الدالة د عكسية لنفسها، ويكون (د ∘ د)(س) = س ، ومنحناها متماثلًا حول المستقيم ص = س.

ثانيًا: أهم الدروس

• ٢-١ تعريف الدوال ومجالها ومداها: معنى العلاقة والدالة، واحد إلى واحد ومتعدد إلى واحد، اختبار المستقيم الرأسي، إيجاد المجال والمدى.

• ٢-٢ الدوال المركّبة: ترتيب إجراء الدالتين، تقييم (د ∘ هـ)(س) عدديًّا وجبريًّا، وشرط وجود التركيب.

• ٢-٣ الدوال العكسية: خطوات الإيجاد الثلاث، والتحقّق بأن ($د^{-1}$ ∘ د)(س) = س.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

• ٢-٤ منحنى الدالة ومنحنى دالتها العكسية: الانعكاس حول المستقيم ص = س ، والدالة العكسية لنفسها.

ثالثًا: أهم المسائل في المذكرة

• أمثلة ٢-١ وتمارينها: تحديد ما إذا كانت العلاقة دالة، وإيجاد المجال والمدى من المخططات والقواعد.

• أمثلة ٢-٢ (٧ ، ٨ ، ٩) وتمارينها: إيجاد (د ∘ هـ)(س) و (هـ ∘ د)(س) وتقييمهما عند عدد.

• أمثلة ٢-٣ (١٠ ، ١١) وتمارينها: إيجاد $د^{-1}$(س) بالخطوات الثلاث والتحقق بالتركيب.

• أمثلة ٢-٤ وتمارينها: رسم منحنى الدالة العكسية بالانعكاس حول ص = س.

أهم المسائل — مراجعة نهاية الوحدة:

• تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية كاملة.

رابعًا: مسائل متوقَّعة في الاختبار — توقّع استرشادي من الكتاب والمنهج فقط، وليست معلومة مؤكّدة عن الامتحان:

• إيجاد الدالة العكسية $د^{-1}$(س) والتحقق منها بتركيب الدالتين.

• تقييم دالة مركّبة عند قيمة عددية، وإيجاد صورة (د ∘ هـ)(س) المبسّطة.

• إيجاد مجال دالة ومداها (ومنها ما فيه مقام أو جذر) وتحديد ما إذا كانت واحد إلى واحد.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

• الحكم على علاقة معطاة (مخطط أسهم أو تمثيل بياني) هل هي دالة باستخدام اختبار المستقيم الرأسي.

• رسم منحنى الدالة العكسية انعكاسًا حول المستقيم ص = س ، والتعرّف على الدالة العكسية لنفسها.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh