١-٤ الوسط الحسابي

تعلّمنا في الصف العاشر أن **الوسط الحسابي** mean لمجموعة ن من القيم يحسب من خلال قسمة مجموع القيم على عددها.

الوسط الحسابي هو $\overline{س}$ حيث س = مجموع القيم ، إذًا

$$\overline{س} = \frac{\Sigma س}{ن}$$

على سبيل المثال، مجموع القيم ٢٤ ، ٦٧ ، ٤٣ ، ٧١ ، ٩٢ ، ٦٧ ، ٢٩ ، ١٣ هو ٤٢٦ ، إذًا الوسط الحسابي هو

$$\overline{س} = \frac{\Sigma س}{ن} = \frac{٤٢٦}{٨} = ٥٣,٢٥$$

في هذا المثال ٨ قيم فقط، لذا أمكننا إيجاد مجموعها بسرعة، إلّا أن عدد القيم يمكن أن يكون أكبر بكثير، وعليه فلن يكون من المناسب أن نكتب كل الأعداد في قائمة، بل يكون من الأكثر ملاءمة أن نقدم هذه الأعداد في شكل توزيع تكراري، أو أن نبيّنها في مخطط الساق والورقة.

نتيجة ١: الوسط الحسابي لمجموعة قيم عددها ن للمتغيّر س هو $\overline{س} = \frac{\Sigma س}{ن}$

الوسط الحسابي للتوزيع التكراري: يوضّح التوزيع التكراري القيم وتكراراتها، ويمكن إيجاد الوسط الحسابي لتوزيع تكراري بقسمة مجموع القيم (من خلال جمع كل قيمة ضربت في تكرارها)، مقسوم على عدد القيم (مجموع التكرارات).

نتيجة ٢: الوسط الحسابي للمتغيّر س تكرارات قيمه ت هو

$$\overline{س} = \frac{\sum ت\ س}{\sum ت}$$

١-٤ مثال ١

مثال ١

يبيّن الجدول الآتي التوزيع التكراري لـ ٢٥ قيمة للمتغيّر س:
احسب الوسط الحسابي للمتغيّر س.

المتغيّر (س)	التكرار (ت)
٢٠	٢
٢١	٣
٢٢	٥
٢٣	٦
٢٤	٩

الحلّ

أضيف عمود ت × س لإيجاد مجموع الـ ٢٥ قيمة وعنوانه "ت × س".

المتغيّر (س)	التكرار (ت)	ت × س
٢٠	٢	٢٠ × ٢ = ٤٠
٢١	٣	٢١ × ٣ = ٦٣
٢٢	٥	٢٢ × ٥ = ١١٠
٢٣	٦	٢٣ × ٦ = ١٣٨
٢٤	٩	٢٤ × ٩ = ٢١٦
مج ت = ٢٥		مج ت س = ٥٦٧

مثال: توجد قيمتان كل منهما ٢٠ ، ما يعني أن مجموعهما (٢ × ٢٠ = ٤٠ = ٢٠ + ٢٠) كذلك توجد ٣ قيم كل منها ٢١ أي ٦٣ = ٣ × ٢١ (٦٣ = ٢١ + ٢١ + ٢١) كما أن هناك ٥ قيم كل منها ٢٢ (١١٠ = ٥ × ٢٢) ، ٦ قيم من ٢٣ (١٣٨ = ٦ × ٢٣) و ٩ قيم منها ٢٤ (٢١٦ = ٩ × ٢٤).

مجموع الـ ٢٥ قيمة للمتغيّر س يساوي ٥٦٧ ، فيكون الوسط الحسابي $\overline{\text{س}} = \frac{\text{مج ت س}}{\text{مج ت}} = \frac{٥٦٧}{٢٥} = ٢٢,٦٨$

١-٤ الوسط الحسابي للبيانات الممثلة في مخططات الساق والورقة

١ - مخططات الساق والورقة:

تعلّمت سابقًا كيفية استخدام مخطّط الساق والورقة، حيث يعد نوعًا من المخططات التي تُستعمل لترتيب قيم البيانات. ويمكن إيجاد الوسط الحسابي للقيم في مخطّط الساق والورقة، بقسمة مجموع القيم (جميع القيم الموضحة على مفتاح المخطط) على عددها.

تظهر القيمة ١٥ بوضع ١٥ في الساق و ٩ كورقة على الشكل ٩ | ١٥

تظهر القيمة ١٨ بوضع ١٨ في الساق و ٥ كورقة على الشكل ٥ | ١٨

لإيجاد الوسط الحسابي للقيم في مخطط الساق والورقة، نجمع القيم كلها كما أوضحها المفتاح ونقسم مجموعها على عددها.

مثال ٢

يبيّن مخطط الساق والورقة عدد الأهداف المسددة لكل من أحد عشر لاعب كرة قدم في الموسم الماضي. أوجد الوسط الحسابي للأهداف.

٩٨٨٥	٠
٩٩٧٦٤٣	١
٢	٢

المفتاح: ١ | ٣ يمثّل ١٣ هدفًا

الحلّ

مجموع الأعداد الأربعة في الصف الأول هو
٥ + ٨ + ٨ + ٩ = ٣٠

مجموع الأعداد الستة في الصف الثاني هو
١٣ + ١٤ + ١٦ + ١٧ + ١٩ + ١٩ = ٩٨

مجموع العدد الواحد في الصف الثالث هو ٢٢

الوسط الحسابي لعدد الأهداف هو

$$\overline{س} = \frac{\Sigma\, س}{ن} = \frac{٣٠ + ٩٨ + ٢٢}{١١} = \frac{١٥٠}{١١} = ١٣,٦$$

١-٤ الأعمدة البيانية

٢ - الأعمدة البيانية:

في الأعمدة البيانية، يتمّ رسم عمود لتمثيل كل قيمة ويبيّن تكرارها من خلال ارتفاع العمود. لإيجاد الوسط الحسابي للأعمدة البيانية، نوجد مجموع القيم من خلال ضرب كل قيمة في تكرارها (ارتفاع عمودها) ونقسمها على مجموع عدد القيم (مجموع ارتفاعات الأعمدة).

مثال ٣

يبيّن مخطط الأعمدة عدد الاتصالات الهاتفية التي يتلقاها عدد من الأولاد في عطلة نهاية الأسبوع. أوجد الوسط الحسابي لعدد الاتصالات الهاتفية؟ (الأعمدة: ١ ← ٤، ٢ ← ٥، ٣ ← ٢، ٤ ← ١)

الحلّ

يبيّن مخطط الأعمدة معلومات حول ٤ + ٥ + ٢ + ١ = ١٢ ولدًا.

يمثّل العمود الأول ٤ = ١ × ٤ اتصالات

يمثّل العمود الثاني ١٠ = ٢ × ٥ اتصالات

يمثّل العمود الثالث ٦ = ٣ × ٢ اتصالات

يمثّل العمود الرابع ٤ = ٤ × ١ اتصالات

الوسط الحسابي لعدد الاتصالات الهاتفية هو

$$\overline{س} = \frac{\sum ت\ س}{\sum ت} = \frac{٤ + ١٠ + ٦ + ٤}{١٢} = \frac{٢٤}{١٢} = ٢$$

khaled-m

١-٤ الوسط الحسابي لمجموعة من القيم

قد يتوافر لدينا أحيانًا ملخص المقاييس الإحصائية لمجموعتي بيانات أو أكثر، فمثلًا، قد نحتاج إلى اختبار تأثير عدد من السياسات البيئية على تقليل انبعاث غاز الكربون من السيارات، ومعتمدين على عدد السيارات لكل أسرة. فقد نعرف الوسط الحسابي لعدد السيارات لكل أسرة في مدينة مسقط وفي مدينة إبراء، ولكننا لا نستطيع دمج الوسط الحسابي للمدينتين بأن نجمع الوسطين ونقسم الناتج على اثنين، لأن عدد الأسر في كل من المدينتين مختلف: لذا نستخدم الوسط الحسابي الموزون في كل من هذه الحالات كالآتي:

أ ، ب مجموعتا أعداد:

مجموع قيم المجموعة أ الـ ٢٠ يساوي ٥٠٠

مجموع قيم المجموعة ب الـ ٣٠ يساوي ٨٤٠

عدد القيم في المجموعتين هو ٥٠ = ٢٠ + ٣٠ قيمة، مجموعها ١٣٤٠ = ٨٤٠ + ٥٠٠

$$\text{الوسط الحسابي للمجموعتين} = \frac{٥٠٠ + ٨٤٠}{٢٠ + ٣٠} = \frac{١٣٤٠}{٥٠} = ٢٦,٨$$

$$\text{الوسط الحسابي للمجموعة أ} = \frac{٥٠٠}{٢٠} = ٢٥$$

$$\text{الوسط الحسابي للمجموعة ب} = \frac{٨٤٠}{٣٠} = ٢٨$$

لاحظ أن الوسط الحسابي للمجموعتين ٢٦,٨ لا يساوي ٢٦,٥ حيث

$$٢٦,٥ = \frac{٢٥ + ٢٨}{٢}$$

نتيجة ٣: الوسط الحسابي لمجموعتَي بيانات أو أكثر يحسب بمعرفة مجموع القيم مجتمعة والعدد الكلي لقيم المجموعتَين.

مثال ٤

تحتوي علبة حلوى كبيرة كتلتها الكلية ٨٥٢٫٤ غم على ٧٢ قطعة، وتحتوي علبة حلوى صغيرة كتلتها الكلية ٢٨٢٫٨ غم على ٢٤ قطعة. ما الوسط الحسابي لكتل الحلوى جميعها؟

الحلّ

مجموع عدد قطع الحلوى ومجموع كتلها = كتل الحلوى = ٨٥٢٫٤ + ٢٨٢٫٨ = ١١٣٥٫٢ غم

$$\text{الوسط الحسابي للكتل} = \frac{١١٣٥٫٢}{٩٦} = ١١٫٨٢٥ \text{ غم}$$

(مساعدة: نفترض أن السؤال هنا يعني أن جميع كتل قطع الحلوى فقط وأن كتل العلب التي تحويها غير مضمّنة فيها.)

استكشف ١

في المثال (٤)، الوسط الحسابي للكتل ١١٫٨٢٥ ليس الوسط الحسابي للوسطين الحسابيّين.

استكشف ١ (تابع)

الوسط الحسابي لكتلة قطع الحلوى في العلبة الكبيرة يساوي $\frac{٨٥٢,٤}{٧٢}$ = ١١,٨٣٨ غم، والوسط الحسابي لكتلة قطع الحلوى في العلبة الصغيرة يساوي $\frac{٢٨٢,٨}{٢٤}$ = ١١,٧٨٣ غم، الوسط الحسابي لكتلة جميع قطع الحلوى

$$\neq \frac{١١,٨٣٨ + ١١,٧٨٣}{٢}$$

الوسط الحسابي لـ (أ)، (ب) ≠ $\frac{\text{الوسط الحسابي (أ)} + \text{الوسط الحسابي (ب)}}{٢}$ ولكن ذلك لا يحدث دائمًا.

افترض مجموعتي بيانات، (أ)، (ب) عدد قيم كل منهما م ، ن والوسط الحسابي لهما $\frac{\text{ح أ}}{\text{م}}$, $\frac{\text{ح ب}}{\text{ن}}$ على الترتيب.

ما الموقف الذي يكون فيه الوسط الحسابي لـ (أ)، (ب) معًا يساوي $\frac{\text{الوسط الحسابي (أ)} + \text{الوسط الحسابي (ب)}}{٢}$ ؟

(الرمز ≠ يعني "لا يساوي".)

مثال ٥

عدد الطلبة في رحلة مدرسية ٣٠ طالبًا، منهم ١٢ طالبًا من الصف (أ)، والباقون من الصف (ب). إذا كان الوسط الحسابي لأطوال جميع الطلبة ١٫٦٢ م، والوسط الحسابي لأطوال طلبة الصف (أ) هو ١٫٥٨ م، فما الوسط الحسابي لأطوال طلبة الصف (ب)؟

الحلّ

١) عدد طلبة الصف (ب) = ٣٠ − ١٢ = ١٨

٢) مجموع الأطوال = الوسط الحسابي × عدد الطلبة: مجموع أطوال الصف (أ) = ١٢ × ١٫٥٨ = ١٨٫٩٦ م

٣) مجموع أطوال جميع الطلبة = $\frac{\text{مج س}}{٣٠}$ = ١٫٦٢ أي

مج س = ١٫٦٢ × ٣٠ = ٤٨٫٦ م

٤) مجموع أطوال الصف (ب) = ٤٨٫٦ − ١٨٫٩٦ = ٢٩٫٦٤ م

الوسط الحسابي = $\frac{٢٩٫٦٤}{١٨}$ = ١٫٦٤٦٦٦٦٦...

قرّب الإجابة إلى أقرب عدد مكوّن من ثلاثة أرقام معنوية لتحقّق دقة الأوسط الحسابية الأخرى: ١٫٦٥ م *(مساعدة: الأرقام في الدوائر توضّح خطوات ترتيب الحلّ.)*

٤-١ ب المنوال

درست في الصف العاشر أن **المنوال** هو القيمة الأكثر تكرارًا، على سبيل المثال في التوزيع
٣ ، ٤ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ٤ يتكرر العدد ٤ أكثر من الأعداد الأخرى، لذا المنوال هو ٤ .
في التوزيع ١٤ ، ١٧ ، ١٩ ، ١٤ ، ١٧ ، ١٥ ، ١٤ ، ٢٠ ، ١٧ يتكرر العددان ١٤ ، ١٧ أكثر من الأعداد الأخرى، لذا هناك منوالان هما ١٤ ، ١٧ .
يبيّن الجدول الآتي توزيع التكرار للمتغير ص:

المتغيّر (ص)	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤
التكرار	٩	٦	٥	٣	٢

نلاحظ من الجدول أن ص = ٤٠ تتكرر أكثر من القيم الأخرى، وقد تكررت ٩ مرات. لذا المنوال هو ٤٠ .

نتيجة ٤: المنوال أو القيمة المنوالية هي القيمة الأكثر تكرارًا في التوزيع. قد نجد أكثر من منوال واحد في التوزيع.

مثال ٦

احسب المنوال لكلّ توزيع من التوزيعات الآتية:
أ) تبيّن الأعمدة البيانية الآتية عدد الإخوة لمجموعة من الطلبة: (الأعمدة: ٠ ← ٤ ، ١ ← ٧ ، ٢ ← ٨ ، ٣ ← ٥ ، ٤ ← ٢)

تابع الحل

ب) تبيّن القطاعات الدائرية الآتية اللون المفضل لمجموعة من الطلبة: (أحمر ، أزرق ، زهري ، أصفر ، برتقالي ، ألوان أخرى)

ج) يبيّن مخطط الساق والورقة الآتي معدل نبضات قلب ٢٩ شخصًا:

٧ ٥	٦
٩ ٨ ٣ ٢ ١ ١	٧
٨ ٦ ٣ ١ ٠ ٠	٨
٩ ٧ ٧ ٤ ٣ ٣ ٣ ١	٩
٧ ٧ ٥ ٣ ٠	١٠
٨	١١

المفتاح: ٧ | ١ = ٧١ نبضة في الدقيقة

الحلّ

أ) المنوال = ٢ (أخوان) — في لوحة الأعمدة أطول عمود هو المنوال.

ب) المنوال = اللون الأزرق — القطاع الأكبر من مخطط الدائرة هو المنوال، في هذه الدائرة القطاع الأزرق هو الذي يمثل النسبة الأكبر من الطلبة الذين يفضلون اللون الأزرق.

ج) المنوال = ٩٣ نبضة في الدقيقة — العدد الذي يظهر أكثر من غيره هو ٩٣ بتكرار الرقم ٣ في الصف الرابع.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

١-٤ ج الوسيط — وسيط التوزيعات التكرارية

الوسيط median هو القيمة التي تتوسط القيم عندما ترتَّب قيم التوزيع من الأصغر إلى الأكبر (تصاعديًا)، أو من الأكبر إلى الأصغر (تنازليًا).

قيم التوزيع ٥ ، ٩ ، ١٢ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٤ ، ٣٠ مرتبة تصاعديًا.

يوجد ٧ قيم فتكون رتبة الوسيط $\frac{(١ + ٧)}{٢}$ = ٤ ، إذًا الوسيط هو العدد ١٨ .

أمّا قيم التوزيع ٢٧ ، ٣٧ ، ٤٦ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٧٤ فيجب ترتيبها أولًا.

الترتيب التصاعدي ٢٧ ، ٣٧ ، ٤٦ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٧٤

يوجد ٦ قيم، تكون رتبة الوسيط $\frac{(١ + ٦)}{٢}$ = ٣,٥ ، أي أن الوسيط يقع بين القيمة الثالثة والقيمة الرابعة.

القيمة الثالثة هي ٤٦ ، والقيمة الرابعة هي ٥٥

الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتَين الوسيطتَين

$$= \frac{٤٦ + ٥٥}{٢} = ٥٠,٥$$

(مساعدة: تأكد من ترتيب القيم قبل تحديد قيمة الوسيط.)

نتيجة ٥: يقع الوسيط لمجموعة قيم عددها ن في منتصف المسافة بين القيمة الأولى والقيمة رقم ن. الوسيط هو القيمة ذات الرتبة $\frac{(ن + ١)}{٢}$.

يبيّن الجدول الآتي توزيع ٢٥ قيمة للمتغيّر س، تظهر **التكرارات التراكمية** cumulative frequencies ومواقع القيم بترتيب تصاعدي في العمودين الثالث والرابع:

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

المتغيّر (س)	التكرار (ت)	التكرار التراكمي	الموقع
٣٠	٩	٩	من الأول إلى التاسع
٣١	٦	١٥	من العاشر إلى الخامس عشر
٣٢	٥	٢٠	من السادس عشر إلى العشرين
٣٣	٣	٢٣	من الواحد والعشرين إلى الثالث والعشرين
٣٤	٢	٢٥	الرابع والعشرون والخامس والعشرون
	Σ ت = ٢٥		

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

رتبة الوسيط هي $\frac{(١ + ٢٥)}{٢}$ = ١٣ وقيمة الوسيط هي ٣١ .

نتيجة ٦: للمتغير س حيث مجموع التكرارات هو ∑ ت:

الوسيط هو القيمة ذات الرتبة $\frac{(\sum ت + ١)}{٢}$.

مثال ٧

يبيّن الجدول الآتي ٦٥ قراءة غير مجمّعة للمتغيّر س: كما يبيّن الجدول التكرارات التراكمية ومواقع القراءة. احسب قيمة وسيط المتغير س:

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

س	ت	التكرار التراكمي	الموقع
٤٠	١١	١١	من الأول إلى الحادي عشر
٤١	٢٣	٣٤	من الثاني عشر إلى الرابع والثلاثين
٤٢	١٩	٥٣	من الخامس والثلاثين إلى الثالث والخمسين
٤٣	٨	٦١	من الرابع والخمسين إلى الواحد والستين
٤٤	٤	٦٥	من الثاني والستين إلى الخامس والستين

الحلّ

مجموع تكرارات القراءات ٦٥ ،

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تابع الحل

رتبة الوسيط = $\frac{(ن + ١)}{٢}$ = $\frac{(٦٥ + ١)}{٢}$ = ٣٣ ، نلاحظ أن القراءة التي رتبتها ٣٣ تقع ضمن القيم التي موقعها من رقم ١٢ إلى رقم ٣٤ وجميعها ٤١

قيمة الوسيط س هي ٤١

(مساعدة: يجب أن تؤخذ التكرارات بالحسبان هنا. فعلى الرغم من أن ٤١ ليست في الصف الأوسط من الجدول إلا أنها في منتصف القيم الـ ٦٥ .)

١-٤ استكشف ٢ ووسيط البيانات في مخططات الساق والورقة

استكشف ٢

توجد عدة مصادر تبيّن المعدلات التالية للشخص (الطبيعي) البالغ:

• يضحك ١٠ مرات في اليوم. • يغفّ في النوم بعد ٧ دقائق. • يخسر ٠,٧ كغم من الجلد سنويًا. • ينمو عنده ٩٤٤ كم من الشعر مدى حياته. • سرعة العطسات التي ينتجها ١٦٠ كم/ساعة. • أطوال الشرايين والأوردة في جسمه ٩٧٠٠٠ كم. • عدد المفردات التي يعرفها بين ٥٠٠٠ و ٦٠٠٠ مفردة. • معدل طول البالغين من الذكور ١٧٢,٥ سم ومعدل كتلتهم ٨٠ كغم. • معدل طول البالغات من الإناث ١٥٩ سم ومعدل كتلتهن ٦٨ كغم.

استكشف ٢ (تابع)

ماذا تعني كل عبارة من هذه العبارات؟ وكيف حُددت؟ هل سبق لك أن واجهت شخصًا يتمتع بهذه المعدّلات؟ كيف يمكن أن نستفيد منها؟

ستجد أرقامًا متنوعة ومستمرة وحديثة تعطي معدلات تثير الاهتمام في الموقع الإلكتروني
http://www.worldometers.info

١ - مخططات الساق والورقة:

القيم الموجودة في مخطط الساق والورقة مرتبة، وغالبًا ما تكون في ترتيب تصاعدي من الأعلى إلى الأسفل ومن اليمين إلى اليسار.

إذا كان هناك ن قيم يكون الوسيط هو القيمة في المكان $\frac{(ن + ١)}{٢}$ ، ولإيجاد القيمة في هذا المكان يمكننا إما أن نبدأ العدّ من القيمة الصغرى أو أن نبدأ من القيمة الكبرى.

مثال ٨

يبيّن مخطط الساق والورقة عدد الأهداف المسددة لكل من أحد عشر لاعب كرة قدم في الموسم الماضي. أوجد وسيط الأهداف المسددة.

٩٨٨٥	٠
٩٩٧٦٤٣	١
٢	٢

المفتاح: ١ | ٣ يمثّل ١٣ هدفًا

الحلّ

القيمة الوسطى هي في المكان $\frac{(١ + ١١)}{٢}$ = ٦

عند العد من القيمة الصغرى ٥ ، تكون القيمة رقم ٦ هي ١٤ وتكون هي الوسيط.

كذلك عند العد من القيمة الكبرى ٢٢ ، تكون القيمة رقم ٦ هي ١٤ أيضًا.

٢ - الأعمدة البيانية:

في الأعمدة البيانية (مخطّط الأعمدة)، نحتاج إلى إيجاد العدد الكلي للقيم حتى نستطيع استنتاج مكان القيمة الوسطى. نقوم بهذا الأمر من خلال إيجاد مجموع التكرارات، والتي تعطينا إياها ارتفاعات الأعمدة.

مثال ٩

يبيّن مخطط الأعمدة عدد الاتصالات الهاتفية التي تلقاها عدد من الأولاد في عطلة نهاية الأسبوع. (الأعمدة: ١ ← ٢ ، ٤ ← ٣ ، ٥ ← ٤ ، ٢ ← ١) أوجد الوسيط لعدد الاتصالات.

الحلّ

يبيّن مخطط الأعمدة معلومات حول ٤ + ٥ + ٢ + ١ = ١٢ ولذًا.

عندما ن = ١٢ ، يكون الوسيط هو القيمة في المكان

$\frac{(ن + ١)}{٢} = \frac{(١٢ + ١)}{٢}$ = ٦,٥ ، أي بين المكانين ٦ و ٧ .

القيم الأربع الأولى (الأولى إلى الرابعة) كلها تمثّل عدد اتصال واحد (١).

القيم الخمس التي تلي (الخامسة إلى التاسعة) كلها تمثّل اتصالين (٢).

القيمتان السادسة والسابعة كلتاهما تقعان عند القيمة ٢ ، إذًا الوسيط هو ٢ (اتصالان).

تمارين ٤-١

١) أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لكلّ توزيع من التوزيعات الآتية:

أ) ١٢ ، ١٧ ، ١٧ ، ٣٩ ، ٤١ ، ٤٤ ، ٥٤ ، ٦٧ ، ٨٧

ب) ١٢٣ ، ١١٥ ، ٩٨ ، ١٠٧ ، ١١٥ ، ١٠٩ ، ١١٣ ، ٩٨

ج) ٣,٥ ، ١,٠ ، ١٧,٩ ، ٣٨,٣ ، ١,٠ ، -٣٤,٣ ، ٢٧,٨ ، ٤٨,٨ ، -١١,٤

د) $-\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $-\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{١}{٢}$ ، ١

هـ) التوزيع التكراري للمتغير س:

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

س	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥
التكرار (ت)	٩	٦	٤	٣	٢	١

و) التوزيع التكراري للمتغير ص:

ص	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩
التكرار (ت)	٩٩	٩٩	٩٩	٩٩	٩٩

ز) التوزيع التكراري للمتغير هـ:

هـ	التكرار (ت)
٣٦	٨
٣٧	١١
٣٨	١٣
٣٩	١٦
٤٠	٣٧

ح) التوزيع التكراري للمتغير ك:

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ك	التكرار (ت)
٥,٦	٨
٥,٧	٨٨
٥,٨	٤٠
٥,٩	٣٥
٦,٠	٢١

٢) الوسط الحسابي لكتل ٢٠ حبة تفاح ١٥٠ غم، والوسط الحسابي لكتل ٣٠ حبة موز ١٧٠ غم. أوجد:

أ) مجموع كتل حبات التفاح الـ ٢٠

ب) مجموع كتل حبات الموز الـ ٣٠

ج) مجموع كتل حبات الفاكهة الـ ٥٠

د) الوسط الحسابي لكتل حبات الفاكهة الـ ٥٠

٣) الوسط الحسابي لأطوال ١٠ أقلام رصاص ١١,٤ سم، والوسط الحسابي لأطوال هذه الأقلام وأطوال ١٥ قلم تلوين معًا يساوي ٩,٣ سم. أوجد:

أ) مجموع أطوال الـ ٢٥ وحدة جميعها.

ب) مجموع أطوال الـ ١٥ قلم تلوين.

ج) الوسط الحسابي لأطوال أقلام التلوين.

٤) في اختبار من مئة درجة لمادة العلوم، كان الوسط الحسابي لدرجات ١٥ طالبًا من الذكور ٦٢ ، والوسط الحسابي لدرجات ١٧ طالبة من الإناث ٧٠ . احسب:

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

أ) مجموع درجات ٣٢ طالبًا ذكورًا وإناثًا.

ب) الوسط الحسابي لدرجات الطلبة الـ ٣٢ جميعهم.

٥) سجّلت المعلمة مريم جميع درجات اختبارات الرياضيّات (من ١٠) التي حصل عليها الطلبة في المدرسة، كما هو مبيّن في الجدول الآتي:

الدرجة (س)	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
التكرار (ت)	٣	٣	٥	٧	١٢	٢٥	٤٠	٤٧	٣١	٢٥	٢

أ) اكتب الدرجة المنوالية.

ب) كم اختبار رياضيّات سجّلت مريم درجاته؟

ج) أوجد الدرجة الوسيطية لهذه الاختبارات.

د) احسب: ١) مجموع الدرجات الكلّي التي دونتها مريم. ٢) الوسط الحسابي لدرجات الاختبارات.

٦) قائمة تتضمّن ن عددًا، مجموعها ٣١٢ ووسطها الحسابي ٢٠,٨ . أوجد قيمة ن .

٧) الوسط الحسابي لـ ٤٢ عددًا هو ٣٠,٢٥ : أوجد مجموع الأعداد.

٨) الوسط الحسابي للأعداد ١٢ ، ١٩ ، ٢٧ ، ٤٢ ، ك هو ٣٠ : أوجد قيمة ك .

٩) الوسط الحسابي لـ ٧ دعامات ٢,٣١ م، والوسط الحسابي لأطوال أقصر ٦ دعامات منها ٢,٢٥ م: أوجد طول أطول دعامة.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

١٠) كتل ثلاثة رجال هي ٧٤٫٩ كغم ، ٧٤ كغم ، ٨٨٫٢ كغم. زاد الوسط الحسابي للكتل عندما انضم إليهم رجل رابع بمقدار ٣٫٦ كغم. أوجد كتلة الرجل الرابع.

١١) الوسط الحسابي لزمن خمسة أفلام ١ ساعة و ٢٤ دقيقة، والوسط الحسابي لزمن أطول ثلاثة أفلام منها ١ ساعة و ٥٤ دقيقة. أوجد زمن أقصر فيلمَين إذا علمت أن أحدهما أطول من الآخر بـ ١٠ دقائق.

١٢) خلال ساعة الذروة قام بلعرب بعدّ الركاب في جميع المركبات التي عبرت إشارات المرور الضوئية. نتائجه مبيّنة في الجدول الآتي:

عدد الركاب	١	٢	٣	٤	٥
عدد المركبات (ت)	٤٣	٣٨	س	١٢	٣

إذا علمت أن الوسط الحسابي للركاب في المركبة الواحدة ٢٫١٥٢ ، فأوجد قيمة س

تمارين ٤-١ (تابع)

١٣) متغيّر له القيم التسع الآتية:

٤ ، ١١ ، ٢٥ ، ٢٧ ، ١١ ، ٢٦ ، ٣٥ ، ١١ ، ك

أ) ا) أيّ مقياس نزعة مركزية يمكن إيجاده من دون معرفة قيمة ك؟ ٢) اكتب قيمة هذا المقياس.

ب) إذا علمت أن ك أكبر من ٣٠ : ا) أيّ مقياس نزعة مركزية آخر يمكن إيجاده؟ ٢) اكتب قيمة هذا المقياس.

ج) إذا كانت قيمة مقياس النزعة المركزية المتبقّي ٢٢ ، فأوجد قيمة ك .

١٤) تبيّن الأعمدة البيانية المجاورة عدد أخوات كل طالب في أحد الصفوف: (الأعمدة:

٠ ← ١ ، ٦ ← ٢ ، ١٢ ← ٣ ، ٩ ← ٤ ، ٤ ← ٢)

أ) ضع البيانات المبيّنة في الأعمدة البيانية في جدول، مستخدمًا العنوانين: "عدد الأخوات (س)" ، "عدد الطلبة (ت)".

ب) اكتب المنوال لعدد الأخوات.

ج) أوجد الوسيط لعدد الأخوات.

د) احسب الوسط الحسابي لعدد الأخوات.

١٥) أُجريت دراسة لمعرفة عدد أفراد الأسرة في كل منزل في أحد الشوارع. لخّصت النتائج في الأعمدة البيانية المجاورة. لكن أحد الأعمدة مُسح جزئيًا. إذا علمت أن الوسط الحسابي لعدد الأفراد في كل منزل هو ٣ فأوجد: (الأعمدة الظاهرة:

ا ← ٦ ، ٣ ← ١٠ ، ٤ ← ١١ ، ٥ ← ٥ ، وعمود ٢ ممسوح)

أ) مجموع عدد المنازل التي أُجريت عليها الدراسة.

ب) مجموع الأفراد في المنازل جميعها.

١٦) يبيّن مخطّط الساق والورقة الآتي عدد الكتب الموجودة على كل رفّ في مكتبة المدرسة:

٠	٨٨٩
١	٢٢٤٦٨
٢	٠١٣٣٧
٣	١١٢٢٣٤٥

المفتاح: ١ | ٣ تمثّل ١٣ كتابًا على الرفّ

أ) اكتب منوال عدد الكتب على كل رفّ.

ب) أوجد وسيط عدد الكتب على كل رفّ.

ج) احسب، مقرّبًا الإجابة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة، الوسط الحسابي لعدد الكتب على كل رفّ.

١٧) يبيّن مخطّط الساق والورقة المزدوج الدرجات المئوية لأفضل ٢٥ من الطلبة في اختبار ما: (الذكور ١٣ ، الإناث ١٢)

الذكور (١٣)		الإناث (١٢)
٢	٨	١٤
٥٨٩	٨	٨٦٦
٠١٣٣٤	٩	٣٢١٠
٥٦٦٩	٩	٨٧٧

المفتاح: ١ | ٨ | ٢ تمثّل ٨١٪ من الإناث، ٨٢٪ من الذكور

أ) حدّد وسيط الدرجات لـ: ١) الإناث ٢) الذكور

ب) سيمنح الطلبة الـ ٢٥ جوائز. سيقفون، قبل العرض، في خطّ مستقيم بالترتيب بحسب درجاتهم. صِف الطالب الذي سيقف في منتصف المستقيم.

١٨) إذا كان الوسط الحسابي للمتغيّر (س) يساوي ٩٫٦ فأوجد قيمة ك: التوزيع التكراري للمتغير س:

س	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
التكرار (ت)	٢	٧	١١	٩	ك	ك − ٣

١٩) يبيّن الجدول الآتي عدد الكتب التي قرأتها كل مجموعة من مجموعات الأطفال الشهر الماضي:

عدد الكتب	٠	١	٢	٣
عدد الأطفال (ت)	١٠	٨	٦	س

أ) أوجد قيمة س إذا كان الوسط الحسابي لعدد الكتب هو ١ بالضبط.

ب) أوجد أكبر قيمة ممكنة لـ س إذا كان العدد المنوالي للكتب التي قُرأت هو ٠ (صفر).

ج) إذا كان العدد الوسيط للكتب التي قُرأت هو ٢ فأوجد: ١) أصغر قيمة ممكنة لـ س ٢) أكبر قيمة ممكنة لـ س

٢٠) يبيّن الجدول الآتي التوزيع التكراري للمتغير المنفصل ك:

ك	١	٢	٣	٤
التكرار (ت)	س	س ٢	س ٣	س ٤

أ) أوجد الوسيط.

ب) احسب الوسط الحسابي.

ج) ما نوع العدد الذي يجب أن يأخذه س لتكون الحسابات مقبولة؟

٢١) الأعداد ٧ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٦ ، ص رُتِّبت تصاعديًا ووسطها الحسابي يساوي وسيطها: أوجد قيمة ص .

٢٢) سُئل ٢٠ ولدًا و ٣٠ بنتًا عن عدد العمّات وعدد الأعمام لدى كل منهم. المدخلة ٥/٤ في الجدول الآتي تبيّن أن ٤ أولاد و ٥ بنات لدى كل منهم ٣ عمّات و ٢ من الأعمام:

الأعمام ÷ العمّات	٠	١	٢	٣
٠	٠/١	٢/٠	١/٢	١/١
١	٠/٠	٤/٣	٤/٠	٠/٠
٢	٠/٠	٠/١	١١/٧	٥/٤
٣	٠/١	٠/٠	١/٠	١/٠

(كل مدخلة على الصورة بنات/أولاد)

أ) أوجد الوسط الحسابي لعدد الأعمام عند الأولاد.

ب) لمجموعة الأولاد والبنات معًا، احسب الوسط الحسابي لعدد: ١) العمّات ٢) العمّات والأعمام.

ج) اقترح طريقة بديلة لتمثيل البيانات بحيث تكون الحسابات في الجزئيّتين (أ) ، (ب) أسهل.

٢٣) أُعطيت الرواية نفسها إلى مجموعة من الأطفال ٥ أولاد و ٧ بنات. بعد القراءة مدة ٣٠ دقيقة، جميع الأولاد كانوا قد وصلوا إلى الصفحة ١٢ ، وجميع البنات وصلن إلى الصفحة ١٥ : احسب الوسط الحسابي التقديري لعدد الصفحات التي قرأها:

أ) الـ ٥ أولاد

ب) الـ ٧ بنات

ج) الـ ١٢ طفلًا (جميعهم)

ورقة الإجابات — تمارين ٤-١

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١)

أ) الوسط الحسابي = ٤٢ ، الوسيط = ٤١ ، المنوال = ١٧

ب) الوسط الحسابي = ١٠٩٫٧٥ ، الوسيط = ١١١ ، المنوال = ٩٨ و ١١٥

ج) الوسط الحسابي = ٩٢٫٦ ÷ ٩ = ١٠٫٢٨٨… ≈ ١٠٫٢٩ ، الوسيط = ٣٫٥ ، المنوال = ١٫٠

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

د) الوسط الحسابي = -$\frac{١}{٦}$ ، الوسيط = $\frac{١}{٤}$ ، المنوال = $\frac{١}{٤}$

هـ) الوسط الحسابي = ٢٨٦ ÷ ٢٥ = ١١,٤٤ ، الوسيط = ١١ (الرتبة ١٣) ، المنوال = ١٠

و) الوسط الحسابي = الوسيط = ١٧ ، لا يوجد منوال (كل القيم لها نفس التكرار)

ز) الوسط الحسابي = ٣٢٩٣ ÷ ٨٥ = ٣٨,٧٤ ، الوسيط = ٣٩ (الرتبة ٤٣) ، المنوال = ٤٠

ح) الوسط الحسابي = ١١١٠,٩ ÷ ١٩٢ = ٥,٧٩ ، الوسيط = ٥,٧٥ (بين الرتبتين ٩٦ و ٩٧) ، المنوال = ٥,٧

٢)

أ) ٢٠ × ١٥٠ = ٣٠٠٠ غم

ب) ٣٠ × ١٧٠ = ٥١٠٠ غم

ج) ٣٠٠٠ + ٥١٠٠ = ٨١٠٠ غم

٣) د) ٨١٠٠ ÷ ٥٠ = ١٦٢ غم

٣) ٢٣٢,٥ غم ، ١١٨,٥ غم ، ٧,٩ غم

٤) ٩٣٠ + ١١٩٠ = ٢١٢٠ ، ثم $\frac{٢١٢٠}{٣٢}$ = ٦٦,٢٥

٥) المنوال = ٧ (تكراره ٤٧) ، عدد الاختبارات ٢٠٠ ، الوسيط في الرتبة ١٠٠,٥ (الرتبتان ١٠٠ و ١٠١ قيمتهما ٧) ، المجموع = ١٢٧٩ والوسط الحسابي = ٦,٣٩٥

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٦) ن = $\frac{٣١٢}{٢٠,٨}$ = ١٥

٧) ٤٢ × ٣٠,٢٥ = ١٢٧٠,٥

٨) ١٢ + ١٩ + ٢٧ + ٤٢ + ك = ٥ × ٣٠ = ١٥٠ ، إذًا ك = ٥٠

٩) ١٦,١٧ - ١٣,٥ = ٢,٦٧ م

١٠) $\frac{٢٣٧,١}{٣}$ ≈ ٧٩,٠٣ ، الوسط الجديد = ٨٢,٦٣ ، كتلة الرجل الرابع = ٤ × ٨٢,٦٣٣ - ٢٣٧,١ ≈ ٩٣,٤٣ كغم

١١) ٥ × ٨٤ = ٤٢٠ ، ٣ × ١١٤ = ٣٤٢ ، مجموع أصغر عددين = ٧٨ ، العددان ٣٤ و ٤٤

١٢) $\frac{٤٣ + ٧٦ + ٣س + ٤٨ + ١٥}{٩٦ + س}$ = ٢,١٥٢ ،
١٨٢ + ٣س = ٢٠٦,٥٩٢ + ٢,١٥٢س ، ٠,٨٤٨س = ٢٤,٥٩٢ ، إذًا س = ٢٩

١٣) أ) المنوال = ١١ (تكرر ٣ مرات) ب) الوسيط = ٢٥ (القيمة الخامسة) ج) المقياس المتبقي هو الوسط الحسابي:
٩ × ٢٢ = ١٩٨ ، ك = ١٩٨ - ١٥٠ = ٤٨

١٤) س: ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ؛ ت: ٦ ، ١٢ ، ٩ ، ٤ ، ٢ ؛ المنوال = ١ ، الوسيط في الرتبة ١٧ (ن = ٣٣) فهو ١ ، الوسط الحسابي = $\frac{٥٠}{٣٣}$ ≈ ١,٥٢

١٥) ليكن تكرار البيوت ذات الشخصين س: $\frac{١٠٥ + ٢س}{٣٢ + س}$ = ٣ ، إذًا س = ٩ ؛ أ) ٤١ بيتًا ب) ٤١ × ٣ = ١٢٣ شخصًا

١٦) المنوال = ٣١ ، الوسيط (الرتبة ١١) = ٢٣ ، الوسط الحسابي = $\frac{٤٧٠}{٢١}$ ≈ ٢٢,٤

١٧) وسيط البنات = $\frac{٩٠ + ٩١}{٢}$ = ٩٠,٥% ، وسيط الأولاد (الرتبة ٧) = ٩٣% ، الطالب الأوسط (الرتبة ١٣) علامته ٩١%

١٨) $\frac{٢٢٣ + ٢٣ك}{٢٦ + ٢ك}$ = ٩,٦ ، ٢٤٩,٦ + ١٩,٢ك = ٢٢٣ + ٢٣ك ، ٣,٨ك = ٢٦,٦ ، إذًا ك = ٧

١٩) أ) $\frac{٢٠ + ٣س}{٢٤ + س}$ = ١ ، إذًا س = ٢ ب) أكبر قيمة = ٩ ج) رتبة الوسيط بين ١٩ و ٢٤ ؛ أصغر س = ١٤ وأكبر س = ٢٣

٢٠) ن = ١٠ س ، رتبة الوسيط ٥ س + ٠,٥ تقع في القيمة ٣ فالوسيط = ٣ ؛ الوسط الحسابي = $\frac{س + ٤س + ٩س + ٦اس}{١٠اس}$ = ٣ ؛ س عدد طبيعي لأنها تكرار

٢١) ص = -٣ (الوسط = الوسيط = ١٢) ، ص = ١٥,٧٥ ، ص = ٢٧

ملاحظة تصحيح (خطأ مطبعي في الكتاب): النص يقول ٥٠ ولدًا و ٣٠ بنتًا والمدخلة ٤/٥ ، لكن مجموع الجدول كما ورد هو ٢٠ أولاد و ٣٠ بنات = ٥٠ طفلًا ، والمدخلة المطبوعة في الجدول هي ٥/٤ (بنات/أولاد). اعتمدنا بيانات الجدول.

٢٢) أ) مجموع $= \frac{٤٠ \times ١ + ٣ \times ١ + ١٢ \times ٢ + ١ \times ٣}{٢٠} = \frac{٣٠}{٢٠} = ١٫٥$ ب) ١

التكرارات ٢ ، ١٠ ، ٢٦ ، ١٢ فيكون $\frac{٩٨}{٥٠} = ١٫٩٦$ ٢) الأعمام:

$\frac{٧٦}{٥٠} = ١٫٥٢$ ، إذًا ١٫٩٦ + ١٫٥٢ = ٣٫٤٨ ج) تمثيل البيانات في جدولَي توزيع تكراري منفصلين (جدول لعدد العمّات وآخر لعدد الأعمام لكلٍّ من الأولاد والبنات)

٢٣) أ) ١٢ صفحة ب) ١٥ صفحة ج) $\frac{١٥ \times ٧ + ١٢ \times ٥}{١٢} = \frac{١٦٥}{١٢} = ١٣٫٧٥$ صفحة

٢-٤ الحساب التقديري لمقاييس النزعة المركزية

عندما تكون البيانات مبوَّبة في فئات، لا نعرف القيم الفعلية لكل بيان، لذلك نقدّر مقاييس النزعة المركزية باستخدام **مراكز الفئات**.

مركز الفئة = القيمة التي تتوسط حدّي الفئة:

(الحد الأدنى + الحد الأعلى) ÷ ٢

نتيجة ٧: الوسط الحسابي التقديري للبيانات المبوَّبة في فئات: $\overline{س} = \frac{\sum ت \, م}{\sum ت}$ حيث م مركز الفئة و ت تكرارها.

مثال ١٠

يبيّن الجدول الآتي كتل ٧٥ كيسًا من البطاطس:

الكتلة (كغم)	١١٥ - ١٦٥	١٦٥ - ٢١٥	٢١٥ - ٢٦٥
عدد الأكياس (ت)	١٥	٣٧	٢٣

قدّر الوسط الحسابي لكتلة الكيس.

الحلّ

مراكز الفئات: (١١٥ + ١٦٥) ÷ ٢ = ١٤٠ ، (١٦٥ + ٢١٥) ÷ ٢ = ١٩٠ ، (٢١٥ + ٢٦٥) ÷ ٢ = ٢٤٠

$\sum ت \, م = ١٥ \times ١٤٠ + ٣٧ \times ١٩٠ + ٢٣ \times ٢٤٠ = ٢١٠٠ + ٧٠٣٠ + ٥٥٢٠$

$\overline{س} = ١٤٦٥٠ \div ٧٥ = ١٩٥٫٣$ كغم

مثال ١١

سجّلت أعمار ٥٠ شخصًا (بالسنوات المكتملة) في الجدول الآتي:

العمر (سنة)	١٧	١٨	١٩	٢٠
التكرار (ت)	٦	١٢	١٨	١٤

قدّر الوسط الحسابي للأعمار.

الحلّ

الأعمار مكتملة، فالفئات الفعلية: ١٧ - ١٨ ، ١٨ - ١٩ ، ١٩ - ٢٠ ، ٢٠ - ٢١ ومراكزها: ١٧,٥ ، ١٨,٥ ، ١٩,٥ ، ٢٠,٥

$\sum ت م = ٦ \times ١٧,٥ + ١٢ \times ١٨,٥ + ١٨ \times ١٩,٥ + ١٤ \times ٢٠,٥ = ١٠٥ +$

$\overline{س} = ٩٦٥ \div ٥٠ = ١٩,٣$ سنة

مُساعَدة: يمكن احتساب مركز الفئة ١٧ - ١٨ مباشرة: (١٧ + ١٨) ÷ ٢ = ١٧,٥ ، أو بإرجاع الفئة إلى قياساتها الفعلية قبل التقريب. يجب توخّي الحذر؛ فالحساب المباشر لن يؤدي دائمًا إلى القيمة الصحيحة لمركز الفئات.

إيجاد الفئة المنوالية

قد تكون **أطوال الفئات** في التوزيعات التكرارية متساوية أو غير متساوية. فإذا كانت الفئات متساوية الطول، فالفئة المنوالية هي الفئة الأكثر شيوعًا (ذات التكرار الأكبر). أما إذا كانت الأطوال غير متساوية، فالفئة المنوالية هي **الفئة ذات الكثافة الأكبر**.

كثافة التكرار = التكرار ÷ طول الفئة

نتيجة ٨: في المدرَّجات التكرارية، الفئة المنوالية هي العمود الأكثر ارتفاعًا. وينتهي وجود الفئة المنوالية عندما تكون جميع الفئات لها كثافة التكرار نفسها.

مثال ١٢

أوجد الفئة المنوالية لأطوال أقلام الرصاص الـ ٢٧٠ المقربة إلى أقرب سنتيمتر في الجدول المجاور:

الطول (س سم)	٤ - ٧	٨ - ١٠	١١ - ١٢
عدد الأقلام (ت)	١٠٠	٩٠	٨٠

الحلّ

كثافة التكرار = التكرار ÷ طول الفئة ، وباستخدام الحدود الفعلية للفئات:

الطول (س سم)	٣,٥ ≤ س < ٧,٥	٧,٥ ≤ س < ١٠,٥	١٠,٥ ≤ س < ١٢,٥
طول الفئة (سم)	٤	٣	٢
كثافة التكرار	١٠٠ ÷ ٤ = ٢٥	٩٠ ÷ ٣ = ٣٠	٨٠ ÷ ٢ = ٤٠

الفئة المنوالية هي ١١ - ١٢ سم (للدقة ١٠,٥ ≤ س < 12.5 سم).

على الرغم من أن الإجابة عن السؤال واضحة من الجدول، إلا أنه من المفيد أن تلاحظ من المدرَّج التكراري أن الفئة المنوالية هي الفئة التي تمثّل العمود الأطول والأكثر كثافة تكرارية ولو أنها أقل تكرارًا.

مُساعَدة: عندما تُقرَّب القيم، يجب التحقق من قيم طرفي الفئات الصحيحة بعناية باستخدام قيم الحدود الفعلية للفئات.
طول الفئة = الحد الأعلى للفئة - الحد الأدنى لها.

مثال ١٣

يبيّن الجدول الآتي زمن انتظار ١٨٠ مسافرًا في محطة القطار. ما الفئة المنوالية للزمن؟

زمن الانتظار (دقيقة)	٠ - ١٥	١٥ - ٢٥	٢٥ - ٣٠
عدد المسافرين (ت)	٧٥	٦٠	٤٥

الحلّ

أوجد الكثافة بدلالة عدد المسافرين لكل دقيقة:

زمن الانتظار (دقيقة)	٠ - ١٥	١٥ - ٢٥	٢٥ - ٣٠
عدد المسافرين (ت)	٧٥	٦٠	٤٥
الكثافة (مسافرون في كل دقيقة)	٧٥ ÷ ١٥ = ٥	٦٠ ÷ ١٠ = ٦	٤٥ ÷ ٥ = ٩

الفئة المنوالية هي ٢٥ - ٣٠ دقيقة، والتي تتضمّن أكبر عدد من المسافرين في كل دقيقة.

٤-٢ب الحساب التقديري لمقاييس النزعة المركزية: الوسيط

البيانات التي تنظم في فئات (البيانات المتصلة أو البيانات الكثيرة) لا يمكن معها رؤية القيم الفعلية، وهذا يعني أن المقاييس الإحصائية كالوسيط تكون تقديرية. الطريقة المتّبعة لتقدير الوسيط لهذا النوع من البيانات هي **قراءة قيمتها من المنحنى التكراري التراكمي**. فالوسيط يُقدَّر على أنه القيمة التي تكرارها التراكمي يساوي نصف مجموع التكرار التراكمي.

نتيجة ٩: في منحنى التكرار التراكمي يكون موقع الوسيط (رتبته) = $\frac{\text{ن}}{٢}$ ، حيث ن = Σ ت

مثال توضيحي: افترض أن كتل ٣٠٠ قطعة فنّية في متحف ممثلة في المنحنى التكراري التراكمي. عدد قيم مجموعة البيانات ن = ٣٠٠ ، فتقدير الوسيط هو كتلة القطعة الفنية التي رتبتها $\frac{\text{ن}}{٢} = \frac{٣٠٠}{٢} =$ ١٥٠ . نرسم مستقيمًا أفقيًا من القيمة التراكمية ١٥٠ ليتقاطع مع المنحنى، ومن نقطة التقاطع نرسم عمودًا رأسيًا على محور الكتلة. نقرأ المنحنى ونجد أن الكتلة الوسيطة هي ٢٫٦ كغم.

مُساعَدة: المنحنى تقديري؛ لذا نستخدم رتبة $\frac{\text{ن}}{٢}$ وليس رتبة $\frac{\text{ن} + ١}{٢}$ لتقدير رتبة الوسيط. يؤكد صحة $\frac{\text{ن}}{٢}$ أننا نصل إلى الموقع نفسه للوسيط سواء حسبنا من الأسفل إلى الأعلى أو من الأعلى إلى الأسفل على محور التكرار التراكمي. لا تخلط بين رتبة الوسيط (١٥٠) وقيمته (٢٫٦ كغم).

مثال ١٤

يبيّن المنحنى التكراري التراكمي الآتي عيّنة من أعمار ١٤٤ بطارية جافة (العمر ن بالساعات حتى ٣٥ ساعة على المحور الأفقي، وعدد البطاريات (ت) التراكمي حتى ١٤٤ على المحور الرأسي):
أ) قدّر وسيط عمر البطارية. ب) قدّر عدد البطاريات التي عمرها: ١) أقل من ٢٤ ساعة. ٢) أكثر من ٢٤ ساعة.

الحلّ

بما أن ∑ ت = ١٤٤ ، سيكون الوسيط هو عمر البطارية التي رتبتها ($\frac{\sum ت}{٢}$) = ٧٢ ، وبرسم الخط الأفقي والرأسي، وبالتقريب يساوي **١٩,٢ ساعة**.

الخط المنقَّط الثاني يسمح بأن نقدّر عدد البطاريات التي عمرها أقل من ٢٤ ساعة وهذا ما يساوي **١١١ بطارية تقريبًا**.

وعدد البطاريات التي عمرها أكثر من ٢٤ ساعة = ١٤٤ - ١١١ = ٣٣ **بطارية**.

استكشف ٣

أنتجت شركة خدمة الطعام ٤٨٠ قرص بيتزا لأحد المطاعم الأسبوع الماضي. يبيّن الجدول التكراري الآتي البيانات عن قطر قرص البيتزا مقرَّبًا إلى أقرب سنتيمتر:

القطر (إلى أقرب سم)	١٠ - ١٩	٢٠ - ٢٩	٣٠ - ٤٩	٥٠ - ٧٩	٨٠ - ٩٩
عدد أقراص البيتزا (ت)	٣٦	٧٨	١٠٢	٢١٦	٤٨

القطر (ق سم)	ق < ٩٫٥	ق < ١٩٫٥	ق < ٢٩٫٥	ق < ٤٩٫٥	ق < ٧٩٫٥	ق < ٩٩٫٥
عدد أقراص البيتزا (التكرار التراكمي)	٠	٣٦	١١٤	٢١٦	٤٣٢	٤٨٠

قبل أن تحاول رسم التوزيع التكراري التراكمي، يجب الأخذ بالحسبان فجوات الـ ١ سم بين الفئات عبر إيجاد الحدود الفعلية لتلك الفئات، كما هو مبيّن في الجدول التكراري التراكمي الثاني أعلاه.

في المنحنى التكراري التراكمي، يجب تعيين النقاط الآتية (٩٫٥ ، ٠) ، (١٩٫٥ ، ٣٦) ، ... (٩٩٫٥ ، ٤٨٠). افترض أن النقاط قد حُددت مواقعها بطريقة خاطئة على النحو (٩ ، ٠) ، (١٩ ، ٣٦) ، ... (٩٩ ، ٤٨٠).

١) كيف يؤثر هذا الخطأ على شكل المنحنى؟

٢) كيف يؤثر هذا الخطأ على موقع المنحنى؟

٣) قارن بين القراءتَين التي ستحصل عليهما لوسيط قطر البيتزا.

(سؤال نقاشي - الإجابة في ورقة الإجابات)

مُساعَدة: في حال أُعطيت البيانات التقريبية، يجب تعيين النقاط حسب الحدود العليا للفئات.

تمارين ٤-٢ أ

١) تبيّن الجداول التكرارية الآتية المتغيرات ط ، ك ، س ، ن ، ع.
أ) احسب الوسط الحسابي التقديري لكل متغيّر من المتغيرات.
ب) حدّد الفئة المنوالية لكل متغير من المتغيرات.

١) الطول (ط سم):

الطول (ط سم)	ت
٠ ≤ ط < 10	١٩
١٠ ≤ ط < 20	٢٢
٢٠ ≤ ط < 30	١٩

٢) الكتلة (ك كغم):

الكتلة (ك كغم)	ت
١٢ ≤ ك < 20	١٣
٢٠ ≤ ك < 28	٢٠
٢٨ ≤ ك < 36	١١

٣) السرعة (س كم/ساعة):

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

السرعة (س كم/ساعة)	ت
١٠ ≤ س < 25	٦٤
٢٥ ≤ س < 40	١٠٩
٤٠ ≤ س < 55	١١٦
٥٥ ≤ س < 70	١١١

٤) الزمن (ن ثانية):

الزمن (ن ثانية)	ت
١٠ - ١٩	٧
٢٠ - ٢٩	١٨
٣٠ - ٣٩	٣١
٤٠ - ٤٩	١٩

٥) الارتفاع (ع سم):

الارتفاع (ع سم)	٢٠٠ - ٥٠٠	٦٠٠ - ١٠٠٠	١١٠٠ - ١٣٠٠	١٤٠٠ - ١٧٠٠	١٨٠٠ - ٢١٠٠
ت	٤٠	٥٠	٤٢	٢٤	٤٤

مُساعَدة: يعتمد تقدير الوسط الحسابي على كيفية تقسيم البيانات إلى فئات. هنا، الأطوال غير متساوية.

٢) يبيّن الجدول الآتي أطوال (ل سم) عيّنات من أوراق الشجر:

الطول (ل سم)	٢٠ ≤ ل < 45	٤٥ ≤ ل < 60	٦٠ ≤ ل < 70	٧٠ ≤ ل < 90
ت	١٠٠	٧٥	٦٠	٦٠

أ) احسب الوسط الحسابي التقديري للطول.

ب) أوجد الفئة المنوالية.

٣) يتنافس ٦٠ شخصًا من نادي التجديف في سباق التجمّل. يبيّن جدول التوزيع التكراري المجمّع أدناه، الزمن الذي يحتاجون إليه لإتمام السباق:

الزمن (ن ساعة ودقيقة)	٤٠ د ≤ ن < 50 د	٥٠ د ≤ ن < 1 س 00 د	١ س ٠٠ د ≤ ن < 1 س 05 د	١ س ٠٥ د ≤ ن < 1 س 10 د	١ س ١٠ د ≤ ن < 1 س 18 د
عدد الأشخاص (ت)	٤	٢٨	١٠	١٢	٦

أ) اكتب مركز الفئة (بالدقائق) التي تتضمّن ١٠ مجدّفين (أشخاصًا).

ب) احسب الوسط الحسابي التقديري للزمن الذي يستغرقه المجدّفون بالدقائق والثواني.

ج) اشرح باختصار سبب كون ٥٠ د ≤ ن < 1 س 00 د هي الفئة المنوالية.

khaled-math.surge.sh

٤) نظّم طلبة مدرسة سباقًا مدّته ٢٠ دقيقة، حيث يركضون في مسارات حول المدرسة. عدد الدورات الكاملة التي اجتازها الطلبة مبيّنة في الجدول الآتي:

عدد الدورات الكاملة	١ – ٤	٥ – ٧	٨ – ٩	١٠ – ١٢
عدد الطلبة (ت)	٥٦	٨٠	٤٨	١٦

أ) اشرح سبب كون مركز الفئة الأولى يساوي ٣ دورات.

ب) رُعاة الحفل يتبرعون بمبلغ ٢ ريال عماني مقابل كل دورة مكتملة إلى جمعية خيرية محلية: احسب تقديرًا لـ: ١) المبلغ الإجمالي الذي جمعه الطلبة. ٢) الوسط الحسابي للدورات لكل طالب.

٥) يبيّن الجدول الآتي عدد حبّات الطماطم المنتجة في عدد من الأثلام في مزرعة ما:

عدد حبّات الطماطم	٢٠ – ٢٩	٣٠ – ٤٩	٥٠ – ٧٩	٨٠ – ١٠٠
عدد الأثلام (ت)	٣٢٩	٤١٣	٧٠٤	٢٥٨

أ) احسب الوسط الحسابي التقديري لعدد حبات الطماطم المنتجة في اليوم.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ب) تمّ إيجاد كتل الطماطم بدقة، فكان الوسط الحسابي لكتلة حبّة الطماطم ١٥٦٫٥٠ غم. وتمّ بيع الطماطم في السوق بسعر ٠٫٢٨٠ ريالًا عُمانيًا للكيلوغرام الواحد، فكان الإيراد الكلي ٢٠١٫٤٠ ريالًا عُمانيًا: أوجد الوسط الحسابي الفعلي لعدد حبات الطماطم المنتجة في كل ثلم.

ج) ما سبب إمكانية عدم دقة الإجابة في الجزئية (ب)؟

مُساعَدة: الأثلام هي مساحات صغيرة من الأرض مقسّمة بطريقة طولية ومنتظمة تسهّل نمو المحاصيل وريّها والعناية بها.

تمارين ٤-٢ ب

١) يبيّن المنحنى التكراري التراكمي الآتي أطوال ١٠٠ شخص مقرَّبة إلى أقرب سنتيمتر (الطول بالسنتيمتر من ١٧٠ إلى ١٧٦ ، والتكرار التراكمي حتى ١٠٠). استخدم المنحنى لتجد:

أ) عدد الأشخاص الذين تقل أطوالهم عن ١٧٢ سم.

ب) تقدير وسيط الأطوال.

ج) عدد الأشخاص الذين أطوالهم ١٧٥ سم أو أكثر.

٢) يمثّل البيان التراكمي والبيانات المدرجة في الجدول الآتي قيم هـ:

هـ	هـ < ٠	هـ < ١	هـ < ٢	هـ < ٣	هـ < ٤	هـ < ٥	هـ < ٦	هـ < ٧	هـ < ٨
التكرار التراكمي	٠	٢٠	٤٥	٥٥	٦٢	٧٢	٧٤	٧٨	٨٠

قدّر عدد قيم هـ التي: أ) تقل عن ٤,٥ ب) ٢,٥ أو أكثر.

٣) يبيّن الجدول والمنحنى التكراري التراكمي الآتيان كتل ١٨٠ حبة تفاح (م غم):

الكتلة (م غم)	م < ١٥٤	م < ١٥٦	م < ١٥٨	م < ١٦٠	م < ١٦٢	م < ١٦٤	م < ١٦٦	م < ١٦٨	م < ١٧٠
عدد حبات التفاح (التكرار التراكمي)	٠	١٠	٢٢	٤٢	٦٤	١٠٤	١٤٨	١٧٤	١٨٠

أ) استخدم الشكل الناتج لتقدير وسيط كتل التفاح مقرَّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

ب) قدّر عدد حبّات التفاح الذي: ١) تقل كتلته عن ١٦٣ غم. ٢) كتلته ١٦٧ غم أو أكثر. ٣) تقع كتلته في الفئة ١٥٩ غم ≤ م < 161 غم.

منصة الأستاذ خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٤) يبيّن المنحنى التكراري التراكمي الآتي دخل جميع النساء اللواتي يعملن في شركة تأمين كبيرة في الشهر الأخير (الدخل بالريال العماني من ١٠٠ إلى ٤٠٠ ، وعدد النساء (ت) التراكمي حتى ٥٠).

أ) أوجد: ١) عدد النساء اللواتي يعملن في الشركة. ٢) أقل دخل يمكن أن تحصل إحداهن عليه.

ب) قدّر من المنحنى: ١) وسيط الدخل الذي حصلت عليه النساء. ٢) عدد النساء اللواتي حصلن على أقل من ٢٠٠ ريال عماني. ٣) عدد النساء اللواتي حصلن على ٢٥٠ ريالًا عُمانيًا أو أكثر.

٥) يبيّن الجدول المجاور والمنحنى التكراري التراكمي أعمار عيّنة من ٣٢٠ مصباح إنارة:

العمر (س ساعة)	س < ٤٠٠	س < ٥٠٠	س < ٦٥٠	س < ٨٥٠	س < ١٠٠٠	س < ١٢٠٠
عدد المصابيح (تكرار تراكمي)	٠	٢٨	٩٢	٢٧٦	٣٠٠	٣٢٠

استخدم المنحنى لتقدّر: أ) وسيط العمر لمصابيح الإنارة. ب) عدد المصابيح التي عمرها أقل من ٦٠٠ ساعة. ج) عدد المصابيح التي عمرها ٩٥٠ ساعة أو أكثر.

٦) استقصى مجموعة من الطلبة زمن مغادرة ٢٠٠ طائرة تجارية. سجّلوا عدد الدقائق التي تأخرت بها كل طائرة، وظهرت نتائجهم كما في الجدول المجاور والمنحنى التكراري التراكمي:

زمن التأخير (ن دقيقة)	٠ ≤ ن < 10	١٠ ≤ ن < 20	٢٠ ≤ ن < 30	٣٠ ≤ ن < 40
عدد الطائرات (ت)	٤٨	٩٨	٤٦	٨

Σ ت = ٢٠٠ . استخدم المنحنى لتقدّر:

أ) وسيط زمن التأخير.

ب) عدد الطائرات التي تأخرت أقل من ٨ دقائق.

ج) عدد الطائرات التي تأخرت ٢٥ دقيقة أو أكثر.

د) النسبة المئوية للطائرات التي تأخرت ١٧ دقيقة على الأقل.

هـ) عدد الطائرات التي تأخرت مدة ١٥ ≤ ن < 25 دقيقة.

٧) يبيّن الجدول والمنحنى التكراري التراكمي الآتي ارتفاع ٨٧ شجرة في متنزّه عام:

الارتفاع (م)	٢ - ٥	٦ - ٩	١٠ - ١٣	١٤ - ١٧	١٨ - ٢١	٢٢ - ٢٥	٢٦ - ٢٩
عدد الأشجار (ت)	٤	٦	١٤	٢٦	٢٥	٧	٥

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

أ) اكتب الحدّ الأدنى الفعلي والحدّ الأعلى الفعلي للفئة التي تتضمّن ٤ شجرات.

ب) استخدم المنحنى لتجد تقديرًا لـ: ١) وسيط ارتفاع الأشجار. ٢) عدد الأشجار التي يقل ارتفاعها عن ١٥٫٥ م. ٣) عدد الأشجار التي ارتفاعها ٢٤٫٣ م على الأقل.

ج) إذا وُجد ٣٠ شجرة ارتفاعها أقل من س مترًا، فقدّر قيمة س.

د) إذا كان ارتفاع ثُلث الأشجار ص سنتيمترًا على الأقل، فقدّر قيمة ص.

٨) يبلغ فرق الجهد لبطاريات السيارات العادية ١٢ فولتًا. اختُبر مصنع عيّنة من ١٦٠ بطارية وجاءت نتائجها كما هو مبيّن في الجدول الآتي:

فرق الجهد (ف)	١١٫٨ – ١٢٫٠	١٢٫١ – ١٢٫٣	١٢٫٤ – ١٢٫٦	١٢٫٧ – ١٣٫١	١٣٫٢ – ١٣٫٤	١٣٫٥ – ١٣٫٧
عدد البطاريات (ت)	١٨	٢٦	١٢	٧٨	١٨	٨

أ) يمثّل المنحنى التكراري التراكمي هذه البيانات.

ب) استخدم المنحنى لتقدّر: ١) وسيط فرق الجهد. ٢) عدد البطاريات التي فرق جهدها أقل من ١٢٫٤ فولتًا. ٣) عدد البطاريات التي فرق جهدها ١٣ فولتًا أو أكثر.

٩) تمّ اختبار ٥٢٠ حاسوبًا في معالجة البيانات لمعرفة الزمن الذي تستغرقه لمسح ١٠٠ ميجابايت من المعلومات. يبيّن الجدول الآتي النتائج:

الزمن اللازم (ن ثانية)	ن < 0	ن < 0.05	ن < 0.15	ن < 0.40	ن < 0.65	ن < 0.80
عدد معالجات البيانات (تكرار تراكمي)	٠	١٢٠	٢٥٠	٤٠٠	٤٩٠	٥٢٠

أ) استخدم المنحنى لتقدّر عدد المعالجات التي تحقّق المتباينات الآتية: ١) ن < 0.30 ٢) ن ≥ ٠٫٦٠ ٣) ٠٫٢٢٠ ≥ ن < 0.525

ب) فشلت ٥٪ من هذه المعالجات في الاختبار. قدّر الزمن الذي لا يفشل فيه معالج بيانات.

ورقة الإجابات — تمارين ٤-٢ أ

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) أ) الوسط = ٩٠٠ ÷ ٦٠ = ١٥ سم ؛ المنوالية ١٠ ≤ ط < 20 (الأطوال متساوية: الأعلى تكرارًا)

ب) الوسط = ١٠٤٠ ÷ ٤٤ ≈ ٢٣٫٦٤ كغم ؛ المنوالية ٢٠ ≤ ك < 28

٣) الوسط = ١٧١١٠ ÷ ٤٠٠ = ٤٢,٧٧٥ ≈ ٤٢,٧٨ كم/ساعة ؛ المنوالية ٤٠ ≤ س < 55

٤) الوسط = ٢٤٥٧,٥ ÷ ٧٥ ≈ ٣٢,٧٧ ثانية ؛ المنوالية ٣٠ - ٣٩

٥) الوسط = ٢٢٦٤٠٠ ÷ ٢٠٠ = ١١٣٢ سم ؛ المنوالية ١١٠٠ - ١٣٠٠ (الكثافات: ٠,١٣٣ ، ٠,١٢٥ ، ٠,٢١ ، ٠,٠٨ ، ٠,١٤٧ ، والأطوال غير متساوية)

٢) أ) الوسط = ١٥٨٨٧,٥ ÷ ٢٩٥ ≈ ٥٣,٨٦ سم

ب) الكثافات: ١٠٠ ÷ ٢٥ = ٤ ، ٧٥ ÷ ١٥ = ٥ ، ٦٠ ÷ ١٠ = ٦ ، ٦٠ ÷ ٢٠ = ٣ ← المنوالية ٦٠ ≤ ل < 70 سم

٣) أ) مركز الفئة (١ س ٠٠ د ≤ ن < 1 س 05 د) = ٦٢,٥ دقيقة

ب) المراكز بالدقائق: ٤٥ ، ٥٥ ، ٦٢,٥ ، ٦٧,٥ ، ٧٤ ؛ الوسط = ٣٥٩٥ ÷ ٦٠ ≈ ٥٩,٩٢ دقيقة ≈ ٥٩ دقيقة و ٥٥ ثانية

ج) لأن كثافتها هي الأكبر: ٢٨ ÷ ١٠ = ٢,٨ مجدّدًا في الدقيقة (الكثافات: ٠,٤ ، ٢,٨ ، ٢ ، ٢,٤ ، ٠,٧٥)

٤) أ) الفئة الأولى ١ - ٤ تمتد من ١ إلى بداية الفئة التالية ٥ (حدودها ١ إلى ٥) فيكون مركزها = (١ + ٥) ÷ ٢ = ٣ دورات

ب) المراكز: ٣ ، ٦,٥ ، ٩ ، ١١,٥ ؛ مجموع الدورات التقديري = ٥٦ × ٣ + ٨٠ × ٦,٥ + ٤٨ × ٩ + ١٦ × ١١,٥ = ١٣٠٤ دورة

١) المبلغ التقديري = ١٣٠٤ × ٢ = ٢٦٠٨ ريال عماني ٢) الوسط الحسابي = ١٣٠٤ ÷ ٢٠٠ = ٦,٥٢ دورة لكل طالب

٥) أ) المراكز: ٢٤,٥ ، ٣٩,٥ ، ٦٤,٥ ، ٩٠ ؛ الوسط التقديري = ٩٣٢٠٢ ÷ ١٧٠٤ ≈ ٥٤,٧ حبة

ب) الكتلة الكلية = ٢٠١,٤٠ ÷ ٠,٢٨٠ ≈ ٧١٩,٢٩ كغم = ٧١٩٢٨٦ غم ؛ عدد الحبات الفعلي ≈ ٧١٩٢٨٦ ÷ ١٥٦,٥٠ ≈ ٤٦٠٣ حبات ؛ الوسط الفعلي = ٤٦٠٣ ÷ ١٧٠٤ ≈ ٢,٧ حبة في الثلم

ج) لأن ١٥٦,٥٠ غم وسط حسابي لكتلة الحبة وليست كتلة فعلية لكل حبة، فعدد الحبات المحسوب منه تقديري

ملاحظة للمعلّم: الفرق كبير بين التقديري (٥٤,٧) والفعلي (٢,٧) ؛ يُرجَّح خطأ مطبعي في بيانات السؤال (الإيراد أو كتلة الحبة)، والحل أعلاه وفق الأرقام المطبوعة

ورقة الإجابات — تمارين ٤-٢ ب

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

إجابات القراءة من المنحنيات قيم تقديرية، وقد تختلف قليلًا بحسب دقة الرسم والقراءة.

١) أ) ≈ ٣٤ شخصًا

ب) رتبة الوسيط ١٠٠ ÷ ٢ = ٥٠ ← الوسيط ≈ ١٧٣ سم

ج) قراءة (١٧٥ سم) ≈ ٨٤ ← العدد ≈ ١٠٠ - ٨٤ = ١٦ شخصًا

٢) أ) قراءة (٤,٥) ≈ ٦٧ قيمة

ب) قراءة (٢,٥) ≈ ٥٠ ← العدد = ٨٠ - ٥٠ = ٣٠ قيمة

٣) أ) رتبة الوسيط ٩٠ ← الوسيط ≈ ١٦٣,٣ غم

ب) ١) قراءة (١٦٣ غم) ≈ ٨٤ حبة ٢)
١٨٠ - قراءة (١٦٧ غم) ≈ ١٨٠ - ١٦١ = ١٩ حبة ٣) قراءة (١٦١) - قراءة (١٥٩) ≈ ٥٣ - ٣٢ = ٢١ حبة

٤) أ) ١) ٥٠ امرأة ٢) ≈ ١٠٠ ريال عماني

ب) ١) رتبة الوسيط ٢٥ ← الوسيط ≈ ٢٢٥ ريالًا عُمانيًا ٢) قراءة (٢٠٠) ≈ ١٥ امرأة ٣) ٥٠ - قراءة (٢٥٠) ≈ ٥٠ - ٣٣ = ١٧ امرأة

٥) أ) رتبة الوسيط ١٦٠ ← الوسيط ≈ ٧٢٤ ساعة

ب) قراءة (٦٠٠) ≈ ٦٥ مصباحًا

ج) ٣٢٠ - قراءة (٩٥٠) ≈ ٣٢٠ - ٢٩٢ = ٢٨ مصباحًا

٦) أ) رتبة الوسيط ١٠٠ ← الوسيط ≈ ١٥,٥ دقيقة

ب) قراءة (٨) ≈ ٣٨ طائرة

ج) ٢٠٠ - قراءة (٢٥) ≈ ٢٠٠ - ١٦٩ = ٣١ طائرة

د) ٢٠٠ - قراءة (١٧) ≈ ٢٠٠ - ١٢٤ = ٧٦ طائرة ←
(٧٦ ÷ ٢٠٠) × ١٠٠ = ٣٨٪

هـ) قراءة (٢٥) - قراءة (١٥) ≈ ١٦٩ - ١١٢ = ٥٧ طائرة

٧) أ) الفئة ٢ - ٥ ؛ الحد الأدنى الفعلي ١,٥ م ، والحد الأعلى الفعلي ٥,٥ م

ب) ١) رتبة الوسيط ٤٣,٥ ← الوسيط ≈ ١٦,٥ م ٢) قراءة (١٥,٥ م) ≈ ٣٧ شجرة ٣) ٨٧ - قراءة (٢٤,٣ م) ≈ ٨٧ - ٨٠ = ٧ أشجار

ج) قراءة عكسية عند ٣٠ ← س ≈ ١٤,٤ م

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

د) ثلث الأشجار = ٢٩ شجرة ← قراءة عكسية عند ٨٧ - ٢٩ = ٥٨ ← ص ≈ ١٨٨٠ ← ١٨٨٠ سم

٨) ب) ١) رتبة الوسيط ٨٠ ← الوسيط ≈ ١٢٫٨ فولت

٢) قراءة (١٢٫٤ فولت) ≈ ٤٦ بطارية

٣) ١٦٠ - قراءة (١٣ فولت) ≈ ١٦٠ - ١٢٧ = ٣٣ بطارية

٩) أ) ١) قراءة (٠٫٣٠) ≈ ٣٤٠ معالجة ٢) قراءة (٠٫٦٠) ≈ ٥٢٠ - ٤٧٢ = ٤٨ معالجة ٣) قراءة (٠٫٥٢٥) - قراءة (٠٫٢٢٠) ≈ ٤٤٥ - ٢٩٢ = ١٥٣ معالجة

ب) ٥٪ من ٥٢٠ = ٢٦ معالجة تفشل ← الحد عند التراكمي ٥٢٠ - ٢٦ = ٤٩٤ ← الزمن ≈ ٠٫٦٧ ثانية؛ فلا يفشل معالج زمنه أقل من ٠٫٦٧ ثانية تقريبًا

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٣-٤ خصائص مقاييس النزعة المركزية

في أغلب المواقف يدور نقاش كبير حول اختيار المقياس الإحصائي الأكثر مناسبة لعرض القيم في مجموعة بيانات، حيث يمكن من اختيار مقياس إحصائي معيّن أن يُظهر البيانات بشكل جيّد، كذلك من الممكن لمقياس إحصائي آخر أن يعرض البيانات بشكل سيّئ، وعليه لابد من الأخذ في الاعتبار الهدف من التعبير عن البيانات الإحصائية.

افترض أن درجات طالب في ١٠ اختبارات (من ٢٠) هي: ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٧

المقاييس الثلاثة لهذه المجموعة من البيانات: المنوال = ١٧ ، الوسط الحسابي = ٩,٨ ، الوسيط = ٩,٥

إذا رغب الطالب أن يبهر أصدقاءه أو والديه بدرجاته، فغالبًا ما يستخدم المنوال لأنه أعلى مقياس بين المقاييس الثلاثة، حيث إن استخدام الوسط الحسابي أو الوسيط كمقياس للدرجات يشير إلى أن الطالب قد حصل على درجة تقل عن منتصف درجات الاختبارات.

٣-٤ جدول خصائص مقاييس النزعة المركزية

بعض خصائص مقاييس النزعة المركزية:

	الإيجابيات	السلبيات
المنوال	لا يتأثر بالقيم المتطرفة (Biased values) مفيد لأصحاب المصانع الذين يرغبون في النوع الأكثر تفضيلًا وقياسًا يمكن استخدامه لجميع البيانات النوعية	يتجاهل معظم القيم
الوسط الحسابي	يأخذ جميع القيم بالحسبان، ويستخدم في حسابات إضافية أكثر المقاييس الإحصائية استخدامًا يمكن استخدامه لمعرفة مجموع قيم البيانات في حالة معرفة عدد القيم	لا يمكن إيجاده ما لم تعرف القيم جميعها يتأثر بالقيم المتطرفة
الوسيط	يمكن معرفته من دون معرفة جميع القيم، ولا يتأثر بالقيم المتطرفة	يأخذ بالحسبان ترتيب القيم فقط، لذا يتجاهل معظم القيم

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

كمثال على تأثير القيمة المتطرفة: لتكن لديك مجموعة البيانات ٤٠ ، ٤٠ ، ٧٠ ، ١٠٠ ، ١٣٠ ، ٢٥٠
إذا زدنا القيمة الأكبر من ٢٥٠ إلى ٨٨٠ ، فلا يتأثر كل من المنوال والوسيط (وهما ٤٠ و ٨٥) ، لكن الوسط الحسابي يزيد بنسبة ١٠٠٪ من ١٠٥ إلى ٢١٠.

٣-٤ مثالا ١٥ و ١٦

مثال ١٥

يعمل في مصنع ٣٠ موظفًا عاديًا ومدير عالي الدخل. أيّ من مقاييس النزعة المركزية الثلاثة تعطي في الغالب قيمة لا تظهر أن الموظفين العاديين يتقاضون دخلًا أقل بكثير من دخل المدير. اشرح إجابتك؟

الحلّ

يُعتبر دخل المدير قيمة متطرفة، وبما أن الوسط الحسابي أكثر المقاييس الإحصائية تأثرًا بالقيم المتطرفة، فإن قيمة "الوسط" الحسابي في هذه الحالة ستكون أكبر من قيم دخل الموظفين، لكنها أيضًا ستكون أقل من دخل المدير، كما أن قيم كلٍّ من المنوال والوسيط ليسا من ضمن قيم دخل المدير، وبذلك يمكن اعتبار الوسط الحسابي المقياس الإحصائي الأفضل في هذه الحالة.

مثال ١٦

سجّل طبيب الألوان المفضلة لـ ٢٥ من زملائه. أيّ مقياس (مقاييس) للنزعة المركزية يستطيع أن يجد لبياناته؟

الحلّ

تتألف بيانات طبيب من قائمة من الكلمات، وليس قائمة أرقام. يستطيع فقط إيجاد اللون الذي يتكرر أكثر من غيره، وهذا هو المنوال.

تمارين ٤-٣

١) إذا سُئلت أن تجد معدل أطوال الطلبة في صفك، فأيّ مقياس من مقاييس النزعة المركزية يمكنك أن تجد بإيجاد طولَي طالبَين على الأكثر؟

٢) قاست فاطمة بدقّة كتلة طفلَين حديثَي الولادة، ووجدت أن وسطهما الحسابي يساوي ٣,٨٧٣١٥ كغم. اشرح سبب اعتبار ذلك تقديرًا.

٣) يبيّن مخطّط الساق والورقة المجاور عدد الأشخاص الذين يعالجهم طبيب الأسنان يوميًا خلال ٢٠ يومًا:

٧٦٦٥٤٤٤٤	٠
٩٨٨٧٧٦٥٥٥٤	١
١٠	٢

المفتاح: ١ | ٥ تمثّل ١٥ مريضًا

أ) أوجد وسيط عدد المرضى.

ب) في ثمانية أيام من هذه المدة (٢٠ يومًا)، وصل طبيب الأسنان متأخرًا لأنه كان يصطحب أطفاله إلى المدرسة. إذا قرروا استخدام معدل عدد المرضى سببًا للوصول متأخرًا، فهل يستخدمون الوسط الحسابي أم الوسيط؟ اشرح إجابتك.

ج) اشرح موقفًا يكون من المفيد لطبيب الأسنان أن يستخدم المنوال مقياسًا للمعدل.

٤) تمّ بيع مجموعة من المنازل في الجوار بمبلغ ٢٢٠٠٠٠ ، ٢٣٦٠٠٠ ، ٢٤٢٠٠٠ ، ٢٥٠٠٠٠ ريال عماني. يرغب مشترٍ أن يعرف معدل الأسعار في المنطقة. أيّ مقياس يساعده أكثر: الوسط الحسابي؟ أم الوسيط؟ أم المنوال؟ وضّح إجابتك.

ورقة الإجابات — تمارين ٤-٣

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) الوسيط: بعد ترتيب الأطوال، يُوجد الوسيط من طول الطالب الأوسط فقط (عدد فردي من الطلبة) أو من وسط طولَي الطالبين الأوسطين (عدد زوجي)، أي بمعرفة طولَي طالبَين على الأكثر، بينما يتطلب الوسط الحسابي معرفة جميع الأطوال، ويتطلب المنوال فحص التكرارات كلها.

٢) لأن كتلة كلٍّ من الطفلين قيست بميزان دقته محدودة (عادة إلى أقرب جزء من مئة أو من ألف)، فالوسط الحسابي ٣٫٨٧٣١٥ كغم ناتج حسابي بخمس منازل عشرية لا يمكن قياسه فعليًا، لذا يُعد تقديريًا.

٣) أ) ٢٠ قيمة مرتبة: الوسيط = متوسط القيمتين ١٠ و ١١ = (١٥ + ١٥) ÷ ٢ = ١٥ مريضًا

ب) الوسط الحسابي = ٢٤٥ ÷ ٢٠ = ١٢٫٢٥ مريضًا ، بينما الوسيط = ١٥ مريضًا. سيستخدمون الوسيط لأنه يعطي قيمة أكبر تدعم مبررهم للوصول متأخرًا

ج) المنوال = ٤ مرضى (القيمة الأكثر تكرارًا)؛ مفيد مثلًا عند التخطيط للحد الأدنى من الموظفين والتجهيزات اللازمة في اليوم النموذجي قليل الازدحام

٤) الوسط الحسابي = ٩٤٨٠٠٠ ÷ ٤ = ٢٣٧٠٠٠ ريال عماني ، والوسيط = (٢٣٦٠٠٠ + ٢٤٢٠٠٠) ÷ ٢ = ٢٣٩٠٠٠ ريال عماني ، ولا يوجد منوال لأن القيم كلها مختلفة.

المقياس الأنسب هو الوسط الحسابي لأنه يأخذ جميع الأسعار بالحسبان ولا توجد قيمة متطرفة تشوّهه؛ وكلاهما متقارب في هذه البيانات.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- مقاييس النزعة المركزية هي الوسط الحسابي، والوسيط، والمنوال.
- للبيانات غير المجمّعة يُعدّ المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا.
- للبيانات المجمّعة، الفئة المنوالية هي الفئة الأكثر كثافة تكرارية، وتمثّل العمود الأعلى في المدرّج التكراري.

- للبيانات غير المجمّعة، $\overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$
- للبيانات المجمّعة، $\overline{س} = \frac{\sum س ت}{\sum ت}$ أو $\frac{\sum ت س}{\sum ت}$
- للبيانات غير المجمّعة، الوسيط عند القيمة التي رتّبتها $\frac{ن + ١}{٢}$
- للبيانات المجمّعة، الوسيط التقديري يقع عند القيمة التي رتّبتها $\frac{ن}{٢}$ على المنحنى التكراري التراكمي.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الرابعة

١) في كل مجموعة من مجموعات البيانات الآتية، قرر ما إذا كان الوسط الحسابي أكبر من الوسيط والمنوال، أو يساويهما، أو أصغر منهما:

أ) أعمار المرضى الذين يتابعون علاجًا دائمًا في المستشفى.

ب) عدد الأهداف التي سجّلها فريق كرة القدم.

ج) أطوال البالغين القاطنين في إحدى المدن.

٢) الوسط الحسابي لكتلة ١٣ كتابًا يساوي ٨٧٥ غم، والوسط الحسابي لكتلة (ن) رواية يساوي ١٣٧٠٫٦ غم. أوجد الوسط الحسابي لكتلة الرواية الواحدة علمًا أن الوسط الحسابي للكتب والروايات معًا يساوي ٧١٦٫٦ غم.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٣) إذا علمت أن القيم التسعة الآتية هي: ٧ ، ١٢ ، ٢٨ ، ٣٦ ، ١٢ ، ٢٩ ، ٣١ ، ١٢ ، (س) :

أ) اكتب اسم مقياس النزعة المركزية وقيمته التي يمكن إيجادها من دون إيجاد قيمة س.

ب) إذا علمت أن س أكبر من ٤٠ فأيّ مقياس آخر للنزعة المركزية يمكن إيجاده؟ وما قيمته؟

ج) إذا كانت قيمة مقياس النزعة المركزية المتبقي ٢٥ ، فأوجد قيمة س.

٤) يبيّن الجدول الآتي أطوال مجموعة من الأشخاص مقرّبة إلى أقرب ٥ سم:

الأطوال (سم)	١٢٠ - ١٣٥	١٤٠ - ١٥٠	١٥٥ - ١٦٠	١٦٥ - ١٧٠	١٧٥ - ١٨٥
	٣٠	ل	١٢	١٦	٢١

أوجد أقل قيمة للعدد ل إذا علمت أن الفئة المنوالية تساوي ١٤٠ - ١٥٠.

٥) أرادت شركة خدمة الإنترنت معرفة رأي الزبائن بخدمتها، فوزّعت عليهم استمارة تسألهم أن يضع كل منهم علامة في واحد من المربّعات الآتية: ممتاز ، جيد ، وسط ، ضعيف ، ضعيف جدًا.

أ) كيف يمكن للشركة أن تستفيد من معرفة إجابات الزبائن على كل مقياس؟

ب) ما الاستفادة الإضافية التي يمكن للشركة أن تحصل عليها باستخدام العلامة في المجموعة الآتية من المربّعات: ممتاز = ٥ ، جيد = ٤ ، وسط = ٣ ، ضعيف = ٢ ، ضعيف جدًا = ١ ؟

ورقة الإجابات — مراجعة نهاية الوحدة

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) أ) الوسط الحسابي أصغر من الوسيط والمنوال: أعمار المرضى الدائمين غالبًا كبيرة، وتوجد حالات قليلة صغيرة السن (قيم متطرفة صغيرة) تسحب الوسط إلى الأسفل دون أن تؤثر في الوسيط والمنوال

ب) الوسط الحسابي أكبر من الوسيط والمنوال: أغلب المباريات أهدافها قليلة، مع مباريات قليلة كثيرة الأهداف (قيم متطرفة كبيرة) ترفع الوسط

ج) الوسط الحسابي يساوي الوسيط والمنوال تقريبًا: أطوال البالغين توزيعها شبه متماثل

٢) كتلة الكتب = ١٣ × ٨٧٥ = ١١٣٧٥ غم ؛ فتكون معادلة الوسط الكلي: (١١٣٧٥ + ١٣٧٠٫٦ن) ÷ (١٣ + ن) = ٧١٦٫٦

بحلّها:

١١٣٧٥ + ١٣٧٠٫٦ن = ٩٣١٥٫٨ + ٧١٦٫٦ن ← ٦٥٤ن = -٢٠٥٩٫٢ ← ن ≈ ٣-

وهو مستحيل

ملاحظة للمعلّم: الأرقام المطبوعة متناقضة، إذ لا يمكن للوسط الكلي أن يقل عن الوسطين الجزئيين معًا (٨٧٥ و ١٣٧٠,٦) ؛ يُرجَّح خطأ مطبعي في قيمة الوسط الكلي ٧١٦,٦ ، والحل أعلاه يبيّن المنهج المطلوب

٣) أ) المنوال = ١٢ ، لأن ١٢ تتكرر ٣ مرات ولا يمكن لأي قيمة أخرى أن تتكرر أكثر من مرتين مهما كانت قيمة س

ب) لأن س > ٤٠ تأتي أخيرة في الترتيب: ٧ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٢ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣١ ، ٣٦ ، س ، فيمكن إيجاد الوسيط = القيمة الخامسة = ٢٨

ج) المقياس المتبقي هو الوسط الحسابي:
(١٦٧ + س) ÷ ٩ = ٢٥ ← س = ٢٢٥ - ١٦٧ = ٥٨ ، وهي متسقة مع س > ٤٠ ؛ (١٦٧ = ٧ + ١٢ + ١٢ + ١٢ + ٢٨ + ٢٩ + ٣١ + ٣٦)

ورقة الإجابات — مراجعة نهاية الوحدة (تابع)

٤) الكثافات التكرارية: ٣٠ ÷ ١٥ = ٢ ، ل ÷ ١٠ ، ١٢ ÷ ٥ = ٢,٤ ، ١٦ ÷ ٥ = ٣,٢ ، ٢١ ÷ ١٠ = ٢,١

لتكون ١٤٠ - ١٥٠ هي الفئة المنوالية يجب أن تكون كثافتها الأكبر: ل ÷ ١٠ > ٣,٢ ← ل > ٣٢ ← أقل قيمة للعدد ل = ٣٣

٥) أ) تستفيد الشركة من معرفة عدد الزبائن في كل فئة تقييم (التوزيع التكراري) ومن المنوال، أي التقييم الأكثر شيوعًا بين الزبائن، لتقييم جودة خدمتها

khaled-math.surge.sh

ب) بتحويل التقييمات إلى درجات عددية (٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١)
تستطيع الشركة حساب الوسط الحسابي لمستوى الرضا ومتابعته ومقارنته عبر الفترات أو الفروع

ملخص الوحدة الرابعة — مقاييس النزعة المركزية

ملخص قوي شامل وقصير: القوانين والقواعد وخطوات الحل، من ملخص الكتاب (قائمة التحقّق من التعلّم والفهم) بنصّه.

أولًا: القوانين والقواعد (من قائمة التحقّق في الكتاب بنصّها)

• مقاييس النزعة المركزية هي الوسط الحسابي، والوسيط، والمنوال.

• للبيانات غير المجمّعة يُعدّ المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا.

• للبيانات المجمّعة، الفئة المنوالية هي الفئة الأكثر كثافة تكرارية، وتمثّل العمود الأعلى في المدرّج التكراري.

• للبيانات غير المجمّعة، $\overline{س} = \frac{\text{مج } س}{ن}$

• للبيانات المجمّعة، $\overline{س} = \frac{\text{مج } س ت}{\text{مج } ت}$ أو $\frac{\text{مج } ت س}{\text{مج } ت}$

• للبيانات غير المجمّعة، الوسيط عند القيمة التي رتّبتها $\frac{ن + ١}{٢}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

• للبيانات المجمّعة، الوسيط التقديري يقع عند القيمة التي رتّبتها $\frac{\text{ن}}{٢}$ على المنحنى التكراري التراكمي.

خطوات الحل الأساسية

• الوسط الحسابي من جدول: أوجد مراكز الفئات م ، ثم اضرب م × ت واجمع، واقسم على Σ ت.

• الفئة المنوالية: احسب الكثافة التكرارية = التكرار ÷ طول الفئة (الفئات غير المتساوية)، وأعلى كثافة هي المنوالية.

• الوسيط التقديري: ارسم المنحنى التكراري التراكمي، واقرأ قيمة المتغيّر عند التكرار التراكمي $\frac{\text{ن}}{٢}$ (وربعيه عند $\frac{\text{ن}}{٤}$ و $\frac{٣\text{ن}}{٤}$).

ثانيًا: أهم الدروس

• ٤-١: الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للبيانات غير المجمّعة، وقراءتها من الأعمدة البيانية.

• ٤-٢: المقاييس للبيانات المجمّعة — الوسط من الجدول التكراري، الفئة المنوالية من المدرّج التكراري، الوسيط التقديري من المنحنى التكراري التراكمي.

• ٤-٣: خصائص مقاييس النزعة المركزية — تأثّر الوسط الحسابي بالقيم المتطرّفة وثبات الوسيط والمنوال، واختيار المقياس الأنسب.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ثالثًا: أهم المسائل في المذكرة

• مثال ٩ (قراءة الوسط والوسيط والمنوال من الأعمدة البيانية) وتمارين ٤-١ (س١-٢٣).

• أمثلة المدرّج التكراري والكثافة التكرارية لتحديد الفئة المنوالية، وتمارين ٤-٢أ.

• أمثلة المنحنى التكراري التراكمي (الوسيط التقديري والربيعان) وتمارين ٤-٢ب.

• مثالا ١٥ و ١٦ (تأثير القيم المتطرّفة واختيار المقياس) وتمارين ٤-٣.

أهم المسائل — مراجعة نهاية الوحدة:

• مراجعة نهاية الوحدة: خصوصًا س٤ (إكمال خانة مجهولة ل بشرط الفئة المنوالية) وس٢ (الوسط الكلّي — ملحوظ فيه خطأ مطبعي مُعلَّم).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

رابعًا: مسائل متوقَّعة في الاختبار — توقّع استرشادي من الكتاب والمنهج فقط، وليست معلومة مؤكدة عن الامتحان:

- حساب الوسط الحسابي من جدول تكراري (مراكز الفئات × التكرارات).
- تحديد الفئة المنوالية من مدرّج تكراري بفئات غير متساوية الأطوال باستخدام الكثافة التكرارية.
- قراءة الوسيط التقديري والربيعين من منحنى تكراري تراكمي معطى أو مطلوب رسمه.
- إكمال خانة مجهولة في جدول بشرط معطى على المنوال أو الوسط (نوع مراجعة س٤).
- اختيار المقياس الأنسب (وسط / وسيط / منوال) لبيانات فيها قيم متطرّفة مع التعليل.

khaled-ma